הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

הפקולטה להנדסת מכונות

חוברת תרגילים בדינמיקה
034010

עותק מתוקן – חורף תשע"ג

2012/2013

תוקנה ע"י:
פרופ' רובין מיילס
אבו-סאלח סאמי
מחאמיד ראשד
סטרוסבצקי יולי
חנוכה אליעזר
קכמן טל
ספדי מחמוד
גרינברג איתי

תרגיל בית 1

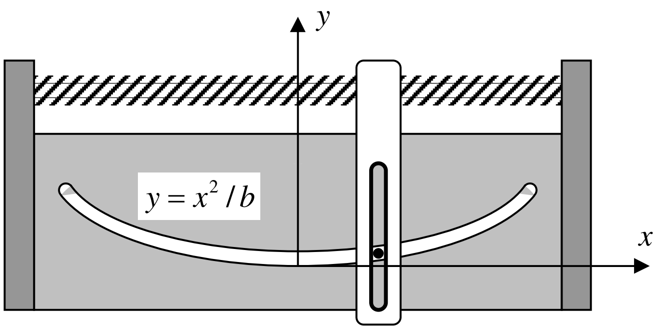
<u>תרגיל 1.1</u>

הפין במערכת מאולץ לנוע במסלול פרבולי שעל גבי הגוף הנח וכן בחריץ שנמצא בתוך המוט המוליך הניצב, כמתואר בציור. המוט נע בכוון x במהירות קצובה של $20\ [mm/s]$. נתון: $b = 160\,[mm]$. דרוש למצוא:

א. ביטוי למהירות של הפין P.

ב. ביטוי לתאוצה של הפין P.

ג. דרוש לחשב את המהירות והתאוצה של הפין כאשר הוא נמצא במרחק x=60 mm.



תשובה: ג. $\mathbf{v} = 20\mathbf{e}_1 + 15\mathbf{e}_2 [mm/s]$, $\mathbf{a} = 5\mathbf{e}_2 [mm/s^2]$

<u>תרגיל 1.2</u>

הנח כי וקטור התאוצה נתון על ידי: $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = (4t-3)\mathbf{e}_1 + t^2\mathbf{e}_2$ כאשר $\mathbf{e}_1$ ו- $\mathbf{e}_2$ הם וקטורי בסיס קבועים (של מערכת קרטזית עומדת). נתון שהמצב ההתחלתי הוא: $t = 0,\ \mathrm{r} = 0,\ v = 0$.

דרוש:

א. חשב את וקטור המהירות v(t).

ב. חשב את וקטור המקום r(t).

תשובה: ב. $\mathbf{r} = \left(\frac{2t^3}{3} - \frac{3t^2}{2}\right)\mathbf{e}_1 + \frac{t^4}{12}\mathbf{e}_2$

<u>תרגיל 1.3</u>

חלקיק P נע בקו ישר מנקודה A r_A: (1,1,1) לנקודה r_B: (-1,4,7)B . (הערה:המרחק במטרים). נסמן וקטור יחידה שכוונו מ- A ל- B על ידי $\mathbf{e}_{B/A}$ ואת המרחק מהנקודה A נסמן על ידי s. וקטור המקום של החלקיק P נתון על ידי: $\mathbf{r}(s)=\mathbf{r}_A+s\mathbf{e}_{B/A}=x_1(s)\mathbf{e}_1+x_2(s)\mathbf{e}_2+x_3(s)\mathbf{e}_3=x_i(s)\mathbf{e}_i$.

דרוש:

א. מצא את הרכיבים הקרטזיים $x_i(s)$ של החלקיק.

ב. מצא את הקואורדינאטות של נקודה C על הקו AB (או על המשכו) שהיא הקרובה ביותר לראשית מע' הצירים $\mathbf{e}_i$.

ג. מהו המרחק בין הנקודה C ובין ראשית הצירים?

ד. מהו המרחק בין הנקודה C ובין הנקודה B?

תשובה: ב. $\frac{1}{7}(9\mathbf{e}_1+4\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)$ ד. $8m$

<u>תרגיל 1.4</u>

ניתן לטעון בקירוב טוב כי הגרר האווירודינמי על מכונית פרופורציוני לריבוע מהירותה. התנגדויות חיכוך אחרות מונחות כקבועות, כך שתאוצת המכונית כאשר היא משייטת (ללא מנוע) יכולה להיות מקורבת ע"י $a=-c_1-c_2v^2$, כאשר c_1 ו- c_2 הם קבועים התלויים בצורת המכונית ו- v היא מהירותה. לשם קביעת c_1 ו- c_2 בוצע הניסוי הבא: המכונית החלה לשייט במהירות 80 קמ"ש. לאחר שעברה מרחק של 200 מטר, נמצא שמהירותה היא 60 קמ"ש.

לאחר שעברה 200 מטר נוספים, נמצא שמהירותה היא 36 קמ"ש.

דרוש לחשב את המרחק הכולל אותו תעבור המכונית מתחילת שיוטה עד שתיעצר כליל?

תשובה : [m] 531.25.

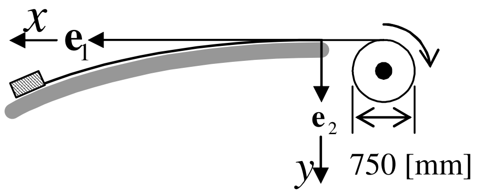
תרגיל בית 2

תרגיל 2.1

מושכים עגלה על מסלול בעזרת כבל שנכרך סביב תוף בקוטר 750 mm שמסתובב במהירות סיבוב [rpm] 120. המסלול ניתן לתואר ע"י המשוואה $y = x^2/b$. כאשר הקבוע $b = 16[m]$ דרוש:

א. מצא ביטוי לווקטור התאוצה של העגלה כתלות ב- x וגודל המהירות v .

ב. חשב את גודל התאוצה a של העגלה כאשר היא נמצאת מטר אחד מתחת לנקודה הגבוהה ביותר שלה.



תשובות: א. $\dfrac{v^2\left(-\frac{x}{8}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\right)}{8\left(1+\frac{x^2}{64}\right)^2}$ ב. $a = 1.986$ [m/s]

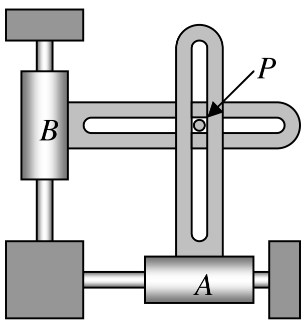
תרגיל 2.2

הפין P בין שתי החוליות מאולץ לנוע במוליכים המחורצים אשר יכולים לנוע בזוית ישרה זה לגבי זה. ברגע מסוים המוליך A נע בכיוון ימינה (במהירות [m/s] 0.2 ובתאוצה [m/s^2] 0.75) . בעוד המוליך B נע בכיוון למטה (במהירות [m/s] 0.15 ובתאוצה [m/s^2]0.5). דרוש:

א. מצא את רדיוס העקמומיות של מסלול הפין P ברגע הנתון.

ב. האם תוכל לחשב גם את קצב השינוי של רדיוס העקמומיות של הפין P באותו רגע.

תשובה: $\rho = 1.25$ [m]



תרגיל 2.3

חלקיק נע על הענף החיובי של מסלול המתואר ע"י המשוואה $y^2 = 4x^3$. הדרך שעובר החלקיק לאורך המסלול נתונה כפונקציה של הזמן ע"י $s(t) = 2t^3$.(x , y נמדדים ב mm, והם פונקציה גם של s , ו- t נמדד ב- sec). $x = 0$ עבור $t = 0$. דרוש:

א. מצא את רדיוס העקמומיות של המסלול בנקודה בה ימצא החלקיק אחרי שנייה אחת.

ב. מצא את התאוצה באותו רגע.

תשובה : א. $\rho = 17.84 \quad [mm]$ ב. $\mathbf{a} = 2.095\mathbf{e}_1 + 11.99\mathbf{e}_2$

תרגיל 2.4

חלקיק נע בקצב קבוע b במישור $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ לאורך העקום הכללי המוגדר על ידי y = y(x). דרוש:

א. כתוב את וקטור המקום $\mathbf{r}$ של החלקיק כפונקציה של x.

ב. נגדיר את s כפרמטר של אורך הקשת, ובהנחה ש- x = x(s), חשב את $d\mathbf{r}/ds$.

ג. נזכור כי $\mathbf{e}_t = d\mathbf{r}/ds$ הוא וקטור יחידה , ובהנחה כי $dx/ds \geq 0$.

הראה כי $ds/dx = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}$

ד. השתמש בחוק השרשרת $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dx}\dfrac{dx}{ds}\dfrac{ds}{dt}$ וחשב את וקטור המהירות כפונקציה של x.

ה. חשב באופן דומה את וקטור התאוצה a.

ו. נזכור כי $\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{e}_t + \dfrac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{e}_n$. ובהסתמך על התוצאות לעיל, הראה שרדיוס העקמומיות של עקום מישורי כללי $y = y(x)$ נתון ע"י $\rho = \left(1 + \left(dy/dx\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} / \left|d^2y/dx^2\right|$.

ז. מצא ביטוי עבור $\mathbf{e}_n$. (הנח $d^2y/dx^2 \geq 0$)

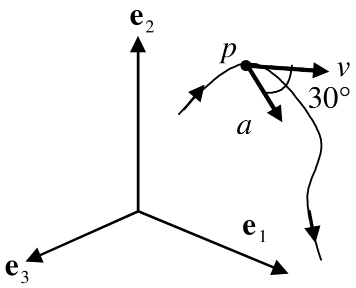
תרגיל בית 3

<u>תרגיל 3.1</u>

החלקיק P נע על עקום מרחבי. ברגע מסוים המהירות היא $\mathbf{v} = 4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ [m/s]. הערך המוחלט של וקטור התאוצה הוא $a = 10\ \mathrm{m/s^2}$ וכוונו מוטה בזוית 30° ביחס למהירות. דרוש:

א. קבע את רכיבי התאוצה בכוון המסלול ובניצב לו.

ב. קבע את רדיוס העקמומיות של המסלול באותה נקודה.



תשובות: א. $a_t = 8.66\, m/s^2$ ב. $\rho = 5m$

<u>תרגיל 3.2</u>

החלקיק P נע על עקום מרחבי כך שרכיבי המיקום במערכת קרטזית נתונים ע"י המשוואות הבאות:

$x = 60\cos\omega t\ ,\ y = 40\sin\omega t\ , z = 30t^2$ נמדדים במ"מ , t בשניות ו- ω= 2 rad/s. דרוש:

א. תאר את מסלול החלקיק.

ב. קבע את וקטורי היחידה שבכווני המשיק והניצב בזמן t = 4 [sec] $(\mathbf{e_t}, \mathbf{e_n})$.

ג. קבע את המהירות של החלקיק בזמן t = 4 [s].

ד. קבע את התאוצה של החלקיק בזמן t = 4 [s].

ה. קבע את רדיוס העקמומיות ρ בזמן t = 4 [s].

תשובות:

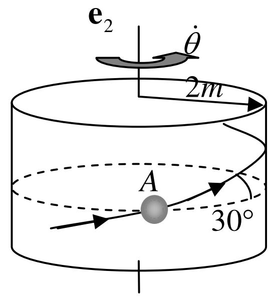
ב. $\mathbf{e}_t = -0.443\mathbf{e}_1 - 0.043\mathbf{e}_2 + 0.896\mathbf{e}_3 \quad ; \mathbf{e}_n = 0.32\mathbf{e}_1 - 0.939\mathbf{e}_2 + 0.115\mathbf{e}_3$

ג. $\mathbf{v} = -118.72\mathbf{e}_1 - 11.64\mathbf{e}_2 + 240\mathbf{e}_3$ ד. $\mathbf{a} = 34.9\mathbf{e}_1 - 158.3\mathbf{e}_2 + 60\mathbf{e}_3$

ה. $\rho = 430.45\, mm$

תרגיל 3.3

חלקיק נע לאורך גליל צילינדרי, כמתואר בציור. בעוברו את נקודה A, גודל התאוצה מגיעה לערך של $10\ [m/s]$ ומגביר את מהירותו, בקו המסלול, בקצב של $8\ [m/s^2]$. דרוש :



א. מהירותו - $\mathbf{v}$.

ב. מהירותו הזוויתית - $\dot{\theta}$.

ג. התאוצה הזוויתית - $\ddot{\theta}$.

ד. התאוצה - a_z .

תשובות: א. $\mathbf{v} = 2\sqrt{3}\mathbf{e}_\theta + 2\sqrt{3}tg(30)\mathbf{e}_z$ ג. $\ddot{\theta} = 2\sqrt{3}$ ד. $\mathbf{a}_z = 4m/s^2$

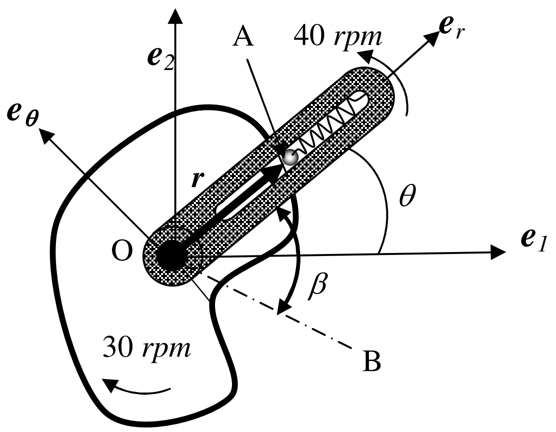
תרגיל 3.4

פיקה מסוימת ניתנת לתאור ע"י המשוואה: $r = b - c\cos\beta$ כאשר הזווית β נמדדת בין המוט המחורץ לבין הקו OB הצמוד לפיקה. הציר שבכיוון $\mathbf{e}_r$ של המערכת הפולרית תמיד הוא צמוד למוט המחורץ. כדור קטן A נמצא בחריץ צמוד כל הזמן לשפת הפיקה (ע"י הקפיץ). נתון כי : b = 100 [mm] , c = 75 [mm] ותנאי ההתחלה של המערכת הם $\theta = \beta = 0$ (הקו OB מתלכד עם הציר $\mathbf{e}_1$) . דרוש למצוא את רכיבי התאוצה המוחלטת של הכדור A כאשר $\beta = 30^o$ עבור התנאים הבאים:

א. הפיקה עומדת והמוט מסתובב כנגד כיוון השעון ב- [rpm] 40 קבוע .

ב. המוט עומד והפיקה מסתובבת כבכיוון השעון ב- [rpm] 30 קבוע .

ג. והפיקה מסתובבת כבכיוון השעון ב- [rpm] 30 והמוט מסתובב כנגד כיוון השעון ב- [rpm] 40.



תשובות:

א. $\mathbf{a}_A = 0.525\mathbf{e}_r + 1.32\mathbf{e}_\theta \quad [m/s^2]$

ב. $\mathbf{a}_A = 0.641\mathbf{e}_r \quad [m/s^2]$

ג. $\mathbf{a}_A = 2.88\mathbf{e}_r + 2.30\mathbf{e}_\theta \quad [m/s^2]$

<u>תרגיל 3.5</u>

צינור חלול BD מחובר בציר B, המאפשר לו להסתובב בזווית $\theta(t)$ במישור האנכי, אל עגלה שנעה במהירות קבועה v_B על מישור אופקי. חלקיק קטן, שנמצא בנקודה P בתוך הצינור, מחובר לקצה אחד של חוט שאורכו L, אשר קצהו השני מחובר לקיר בנקודה O. הגדלים $\theta(t), X(t), L, v_B$ נתונים וידועים. דרוש:

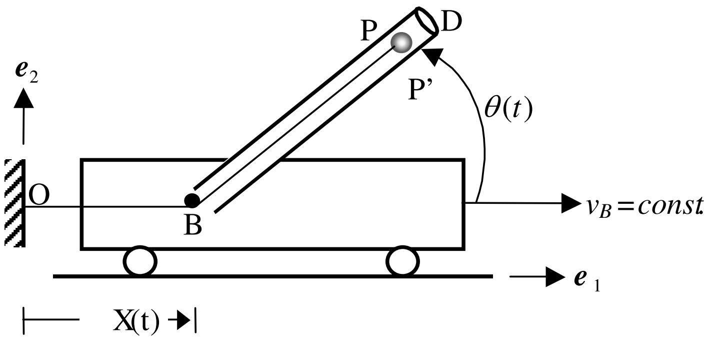
א. קבע וציין בסכימה את מערכות הצירים בהן תשתמש.

ב. מצא את וקטור המהירות המוחלטת $\mathbf{v}(t)$ של החלקיק P.

ג. מצא את וקטור התאוצה המוחלטת $\mathbf{a}(t)$ של החלקיק P.

ד. מצא את וקטור מהירות ההחלקה של החלקיק P ביחס לצינור (כלומר המהירות היחסית בין P לנקודה P' הצמודה לצינור שריגעית מתלכדת עם P).

ה. רשום ביטוי לווקטור יחידה $\mathbf{e}_t$ המשיק למסלול התנועה של P ברגע t.



תשובות :

ב. $\mathbf{v}(t) = \dot{X}(\cos\theta - 1)\mathbf{e}_r + \left(-\dot{X}\sin\theta + (L - X)\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta$

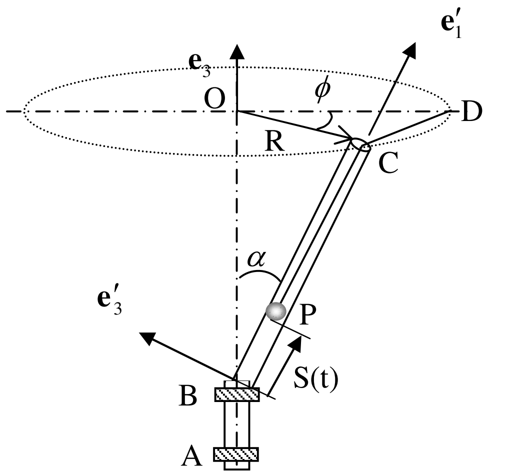
ג. $\mathbf{a}_P = -(L - X)\dot{\theta}^2\,\mathbf{e}_r + \left((L - X)\ddot{\theta} - 2\dot{X}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta$

ד. $\mathbf{v}_{rel} = -\dot{X}\mathbf{e}_r$

תרגיל בית 4

תרגיל 4.1

צינור כפוף ABC מסתובב בתוך מסבים סביב הציר האנכי OA במהירות זוויתית קבועה. חלקיק P שנמצא בתוך הצינור קשור לנקודה קבועה D ע"י חוט שאורכו קבוע.



נתונים:

$$R, \alpha: \quad const.$$
$$t = 0 \rightarrow \phi(0) = 0, \quad s(0) = 0$$

דרוש:

א. את המהירות המוחלטת $\mathbf{v}_P$ של החלקיק.

ב. את התאוצה המוחלטת $\mathbf{a}_P$ של החלקיק.

ג. את מהירות ההחלקה של נקודה P ביחס לצינור BC.

ד. את תאוצה החלקיק ביחס לצינור BC.

תשובה : ג. $\frac{\delta \mathbf{r}_P}{\delta t} = \left(R\dot{\phi} \cos\frac{\phi}{2} \right) \mathbf{e}_1'$ ד. $\frac{\delta^2 \mathbf{r}_P}{\delta t^2} = \left(-\frac{R\dot{\phi}^2}{2} \sin\frac{\phi}{2} \right) \mathbf{e}_1'$

תרגיל 4.2

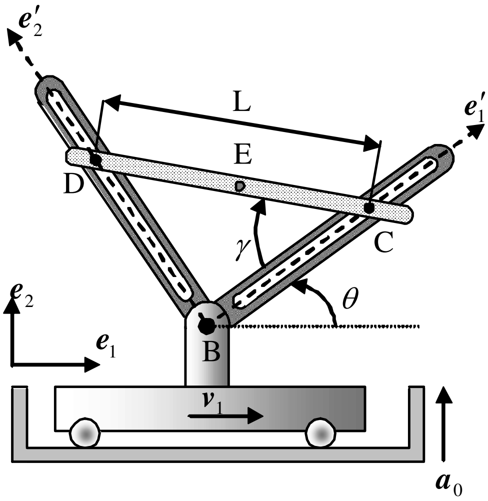
מעלית מאיצה בכיוון מעלה $\mathbf{e_2}$ בתאוצה קבועה a_0. על רצפת המעלית נעה עגלה במהירות קבועה v_1 בכיוון $\mathbf{e}_1$. מערכת הצירים $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ צמודה לשני המוטות BC ו- BD שמחוברים באופן קשיח והזווית בניהם היא 90°. המסגרת של שני מוטות אלו מסתובבת במהירות זוויתית קבועה $\dot{\theta}$. בתוך המסגרת מחליק מוט DC כאשר $\dot{\gamma}$ קבועה. E היא נקודת אמצע המוט. בזמן $t = 0$ מהירות המעלית אפס, כמו כן $\gamma = \theta = 0$

עבור t כלשהו דרוש לחשב :

א. $\mathbf{v}_E$.

ב. $\mathbf{v}_{E/C}$.

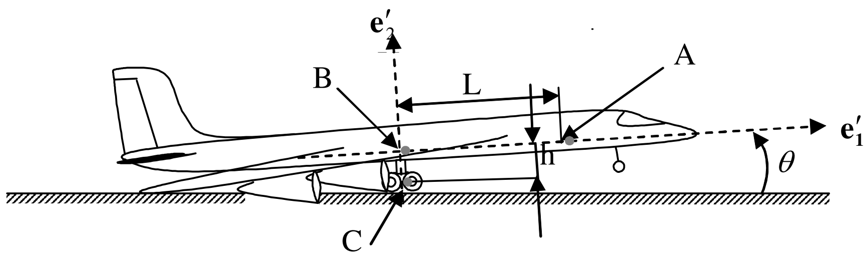
ג. $\mathbf{a}_E$.



תשובה: ב. $\mathbf{v_{E/C}} = \frac{L}{2}\left(\dot{\gamma} - \dot{\theta}\right)\left(\sin\gamma\,\mathbf{e}_1' + \cos\gamma\,\mathbf{e}_2'\right)$

תרגיל 4.3

קרוב לקצה מסלול ההמראה,מהירות ותאוצת מרכז גלגלי המטוס C הן: v_c ו- a_c בכוון אופקי. באותו רגע מתחיל המטוס להרים את האף במהירות זוויתית ותאוצה זוויתית $\omega = \dot{\theta}$ ו- $\alpha = \dot{\omega}$. אדם A הנמצא במרחק L(t) מנקודה B הולך בשביל המרכזי במטוס לכוון הנקודה B במהירות יחסית ותאוצה יחסית v_{rel} ו- a_{rel} ביחס למטוס. דרוש: לפתח ביטוי למהירות והתאוצה המוחלטים של אדם A ברגע הנתון.



תשובה:

$$\mathbf{v}_A = \left(v_c\cos\theta - \omega h + v_{rel}\right)\mathbf{e}_1' + \left(\omega L - v_c\sin\theta\right)\mathbf{e}_2'$$

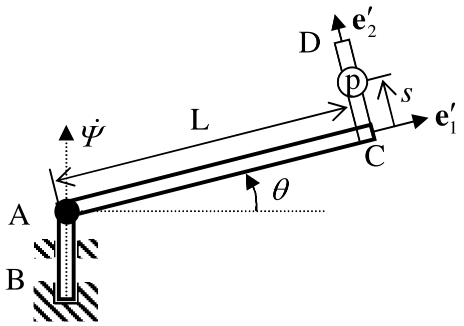
$$\mathbf{a}_A = \left(a_c\cos\theta - \alpha h - L\omega^2 + a_{rel}\right)\mathbf{e}_1' + \left(-a_c\sin\theta - h\omega^2 + L\alpha + 2v_{rel}\omega\right)\mathbf{e}_2'$$

<u>תרגיל 4.4</u>

המוט המכופף ACD מחובר למוט אנכי AB באמצעות פרק חד צירי A. המוט AB מסתובב במהירות זוויתית קבועה $\dot{\psi}$. הזווית θ משתנה בקצב קבוע $\dot{\theta}$. חרוז P נע במהירות קבועה $\dot{s}$ על גבי DC. דרוש:

א. למצוא ביטוי עבור המהירות המוחלטת של החרוז P, ברכיבי מערכת הצירים $\mathbf{e}_i^{'}$ הצמודה למוט המכופף, עבור θ כלשהי.

ב. עבור הרגע בו $\theta = 0$, יש לכתוב ביטוי עבור התאוצה המוחלטת של החרוז.



תשובה : א. $\mathbf{v}_P = -s\dot{\theta}\mathbf{e}_1' + \left(L\dot{\theta}+\dot{s}\right)\mathbf{e}_2' + \left(s\dot{\psi}\sin\theta - L\dot{\psi}\cos\theta\right)\mathbf{e}_3'$

תרגיל בית 5

<u>תרגיל 5.1</u>

חלקיק A נע במהירות קבועה v בחריץ שתמיד מקביל לציר $\mathbf{e}_2$ והחלקיק תמיד במגע עם הדסקה . הדסקה (שרדיוסה R) מסתובבת במהירות זוויתית קבועה $\dot{\theta} = \omega > 0$, מערכת הצירים $\mathbf{e}_i^{'}$ צמודה לדסקה. הנקודה A' היא נקודת המגע הרגעי בין הדסקה והחלקיק A. בזמן $t = 0$, $\theta = 0$ והחלקיק A נמצא על הציר $\mathbf{e}_1$, באותו זמן זה החלקיק A לא מחליק על הדסקה.

א. חשב את גודל המהירות של החלקיק A (v) כפונקציה של b, ω.

ב. חשב את הרכיבים $x_i^{'}(t)$ של הווקטור $\mathbf{x}_A$ יחסית למערכת $\mathbf{e}_i^{'}$

אשר מתאר את מסלול הנקודה A על הדסקה.

ג. חשב את מהירות ההחלקה של החלקיק A יחסית לדסקה.

ד. חשב את המהירות המוחלטת של נקודת המגע הרגעית A’.

ה. חשב את המהירות היחסית בין הנקודה A והנקודה A’.

תשובות:

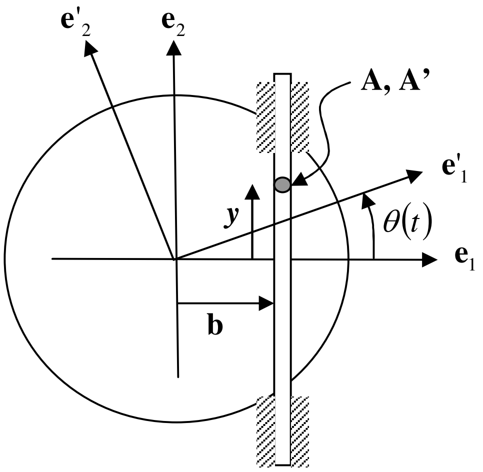
א. $v = b\omega$

ב. $x_1^{'}(t) = b(\cos(\omega t) + \omega t \sin(\omega t)), \quad x_2^{'}(t) = b(\omega t \cos(\omega t) - \sin(\omega t))$

ג. $b\omega^2 t(\cos(\omega t)\mathbf{e}_1^{'} - \sin(\omega t)\mathbf{e}_2^{'})$

ד. $v_{A'} = \omega b[((\cos(\omega t) + \omega t \sin(\omega t))\mathbf{e}_2^{'} + (\sin(\omega t) - \omega t(\cos(\omega t))\mathbf{e}_1^{'}]$

ה. $b\omega^2 t(\cos(\omega t)\mathbf{e}_1^{'} - \sin(\omega t)\mathbf{e}_2^{'})$

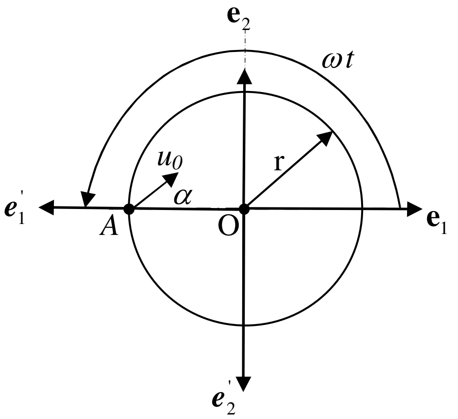


<u>תרגיל 5.2</u>

אדם עומד בנקודה A על פלטפורמה אופקית סובבת, בעלת רדיוס r. הפלטפורמה מסתובבת במהירות זוויתית קבועה ω. בזמן $t=\dfrac{\pi}{\omega}$ האדם זורק כדור במהירות u_0 ובזווית α כלשהי יחסית לפלטפורמה. דרוש:

א. מהן המהירות u_0 והזווית α כך שהכדור יעוף במהירות מוחלטת V, בכיוון $\boldsymbol{e}_1$?

ב. בהנחה שווקטור המהירות הכדור נשארת קבועה, מהו מסלול הכדור ע"ג הפלטפורמה במערכת $\boldsymbol{e}'_i$ (הצמודה לפלטפורמה) עבור $t \ge \dfrac{\pi}{\omega}$?



תשובות :

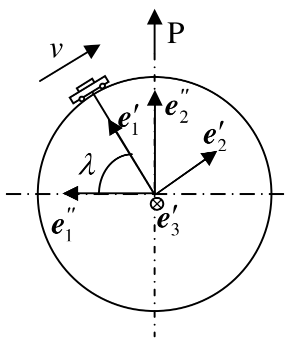
א. $\tan\alpha = \dfrac{\omega r}{V}$, $u_0 = \dfrac{V}{\cos\alpha}$

ב. $\mathbf{x_A} = \left(V(t-\dfrac{\pi}{\omega}) - r\right)\mathbf{e_1} = \left(V(t-\dfrac{\pi}{\omega}) - r\right)\left(\cos(\omega t)\,\mathbf{e}'_1 - \sin(\omega t)\,\mathbf{e}'_2\right)$

<u>תרגיל 5.3</u>

מכונית נוסעת צפונה במהירות קבועה v יחסית לפני כדור הארץ, כשהיא חולפת על פני קו רוחב λ. כדור הארץ, שרדיוסו R, מסתובב במהירות זוויתית קבועה p סביב ציר הקטבים. ניתן להזניח את תנועת מרכז כדור הארץ במרחב. המערכת $\boldsymbol{e}'_i$ עוקבת אחר תנועתה של המכונית, אילו המערכת $\boldsymbol{e}''_i$ צמודה לכדור הארץ, כך ש $\boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}''_3$. כמו כן, $\dot{\boldsymbol{e}}''_i = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{e}''_i$ כאשר $\boldsymbol{\Omega} = p\boldsymbol{e}''_2$, $\dot{\boldsymbol{e}}'_i = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}'_i$ כאשר $\boldsymbol{\omega} = p\boldsymbol{e}''_2 + \dot{\lambda}\boldsymbol{e}'_3$.

דרוש: לבחור אחת משתי המערכות ולחשב את התאוצה המוחלטת של המכונית.



תשובה:

$$\mathbf{a}_A = (-\frac{v^2}{R} - p^2R\cos\lambda)\mathbf{e}''_1 - \frac{v^2}{R}\sin\lambda\,\mathbf{e}''_2 + 2pv\sin\lambda\,\mathbf{e}''_3$$

$$\mathbf{a}_A = (-p^2R\cos^2\lambda - v^2/R)\mathbf{e}'_1 + p^2R\cos\lambda\sin\lambda\,\mathbf{e}'_2 + 2pv\sin\lambda\,\mathbf{e}'_3$$

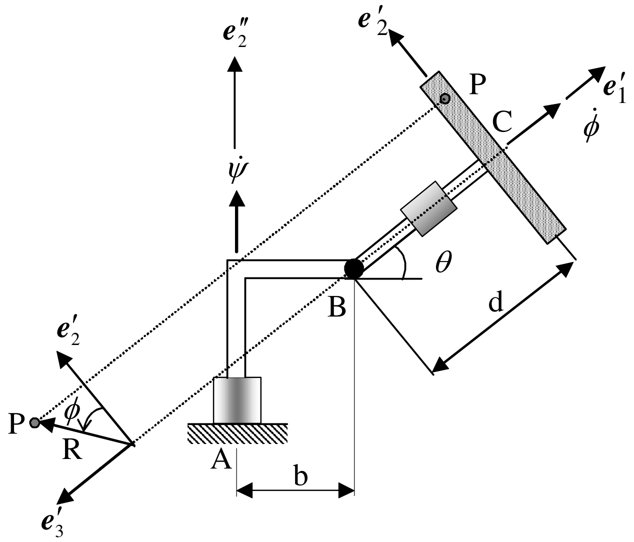
תרגיל 5.4

תנועתה של דיסקה נקבעת ע"י שלושה מנועים הסובבים במהירויות זוויתיות קבועות $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, ו- $\dot{\phi}$. נתון שמערכת הצירים $\boldsymbol{e}_i'$ צמודה למוט BC ואיננה מסתובבת עם הדיסקה כך ש- $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ ו- $\boldsymbol{e}_2''$ נמצאים באותו מישור כל הזמן, כמו כן, $\boldsymbol{e}_2''$ הוא כיוון קבוע במרחב. על היקף הדיסקה נמצאת נקודה P במרחק R ממרכז הדיסקה. דרוש למצוא את הביטויים של:

א. מהירות ותאוצה (מוחלטות) של מרכז הדיסקה.

ב. מהירות ותאוצה של P יחסית ל- C.

ג. מהירות ותאוצה מוחלטות של P.



תשובה:

א. $\boldsymbol{v}_C = \dot{\theta} d\boldsymbol{e}_2' - (\dot{\psi} b + \dot{\psi} d\cos\theta)\boldsymbol{e}_3'$

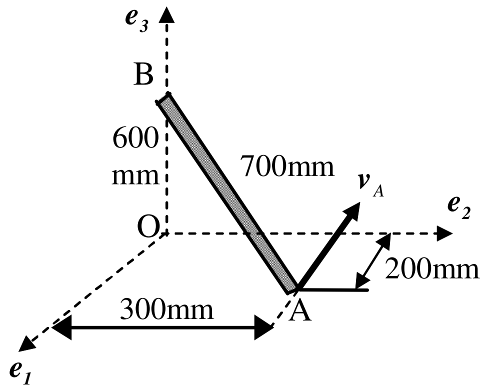
ג. $\mathbf{v_p}\cdot\mathbf{e}_1' = \dot{\psi} R\cos\theta\sin\phi - R\dot{\theta}\cos\phi$

תרגיל בית 6

<u>תרגיל 6.1</u>

הקצה A של החוליה הקשיחה AB, מאולץ לנוע בכוון $(-\boldsymbol{e_1})$ במהירות v_0, כאשר הקצה B מאולץ לנוע בכיוון $\boldsymbol{e_3}$. יש למצוא את המהירות הזוויתית $\boldsymbol{\omega_n}$ של החוליה, כאשר היא חולפת על פני המצב הנתון בציור.

נתון כי - $v_0 = 0.3m/\sec$ ואורך המוט הוא 700 [mm].



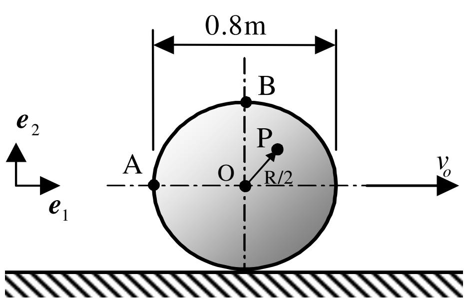
תשובה: $$\boldsymbol{\omega_n} = \frac{1}{0.49}\left(-0.03\boldsymbol{e}_1 + 0.2\boldsymbol{e}_2 + 0.09\boldsymbol{e}_3\right) \quad \left[\frac{rad}{\sec}\right]$$

<u>תרגיל 6.2</u>

המרכז O של דיסקה מעגלית שרדיוסה $0.4\ m$, אשר מתגלגלת ללא החלקה על המישור האופקי, נע ימינה במהירות $v_0 = 0.3m/s$. דרוש:

א. מצא את וקטור המהירות של הנקודה P (נק' כללית במרחק חצי הרדיוס ממרכז הדיסקה).

ב. מצא את וקטור המהירות היחסית של הנקודה B ביחס לנקודה A.



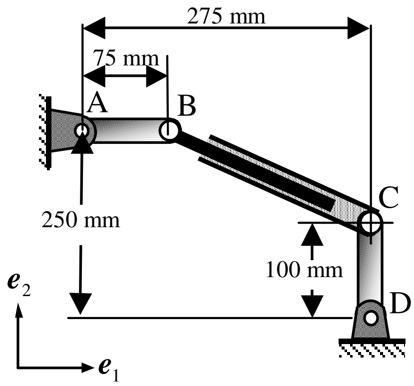
תשובה: $\boldsymbol{v_{B/A}} = 0.3(\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2}) \quad m/s$

תרגיל 6.3

המהירויות הזוויתיות של החוליות AB ו- DC הן:

$$\boldsymbol{\omega}_{D/C} = -0.5\boldsymbol{e}_3 \quad [rad/\sec] \qquad \boldsymbol{\omega}_{A/B} = -0.5\boldsymbol{e}_3 \quad [rad/\sec]$$

דרוש לחשב את המהירות הזוויתית של החוליה הטלסקופית $\boldsymbol{BC}$ (במצב הנוכחי)



תשובה: $\boldsymbol{\omega} = 0.24\,\boldsymbol{e}_3\ rad/s$

תרגיל 6.4

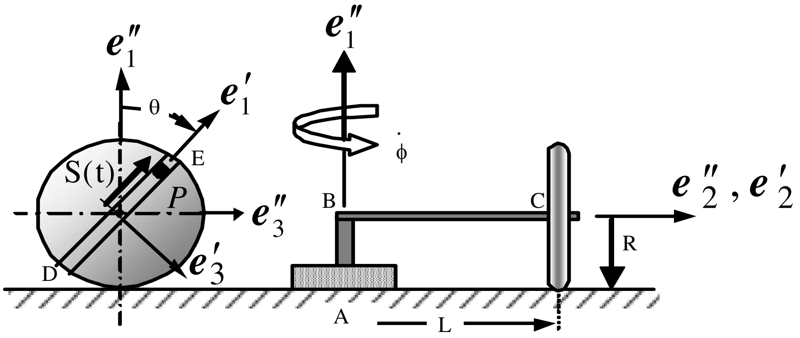
דיסקה עגולה ממוסבת על ציר אופקי BC שמסתובב במהירות זוויתית קבועה $\dot{\phi}$ סביב הציר האנכי AB . הדיסקה מתגלגלת ללא החלקה על גבי המישור האופקי. דרך מרכז הדיסקה עובר צינור רדיאלי חלק DE. בתוך הצינור נע חלקיק קטן P. מערכת צירים $\boldsymbol{e}_i'$ היא צמודה לדיסקה. $\theta(t)$ היא זווית הצינור. $S(t)$ הוא מרחק החלקיק ממרכז הדיסקה. המהירות הזוויתית של הציר היא: $\dot{\phi} = 4\,rad/s$. רדיוס הדיסקה הוא : $R =$ 60 cm. אורך הקטע האופקי BC של הציר הוא: $L = 60$ cm. דרוש:

א.מצא את המהירות הזוויתית, $\boldsymbol{\omega}$ של הדיסקה.

ב.חשב את ערך המהירות הזוויתית כאשר $\theta = 30^\circ$.

ג.בטא את המהירות המוחלטת $\boldsymbol{v}$ של החלקיק ברכיבים של המערכת $\boldsymbol{e}_i'$.

ד.בטא את התאוצה המוחלטת $\boldsymbol{a}$ של החלקיק ברכיבים של המערכת $\boldsymbol{e}_i'$.



תשובות:

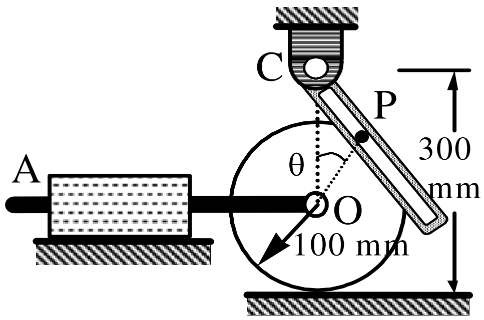
א. $\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\boldsymbol{e}_1'' + \dot{\theta}\boldsymbol{e}_2' = \dot{\phi}\cos\theta\,\boldsymbol{e}_1' - \dot{\phi}\sin\theta\,\boldsymbol{e}_3' - \dot{\phi}\boldsymbol{e}_2'$

ב. $\theta = 30^0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = 2\sqrt{3}\,\boldsymbol{e}_1' - 2\boldsymbol{e}_3' - 4\boldsymbol{e}_2'$

ג. $\boldsymbol{v}_P = \left(\dot{S} - R\dot{\theta}\sin\theta\right)\boldsymbol{e}_1' + \left(-R\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}S\right)\boldsymbol{e}_3' - \dot{\phi}S\sin\theta\,\boldsymbol{e}_2'$

<u>תרגיל 6.5</u>

הגלגל במערכת מתגלגל ללא החלקה על המישור האופקי. ברגע מסוים, כאשר מרכז הגלגל O עובר בדיוק מתחת לנקודה C, מהירות הנקודה O היא $v = 1.5$ [m/s] בכוון ימין והפין P (צמודה לדיסקה) נמצא בזווית $\theta = 30^\circ$ כמתואר בסכימה. דרוש לחשב את גודל המהירות הזוויתית של המוט המחורץ.



תשובה: $\omega = 18.2 \quad \left[\dfrac{rad}{\sec}\right]$

תרגיל בית 7

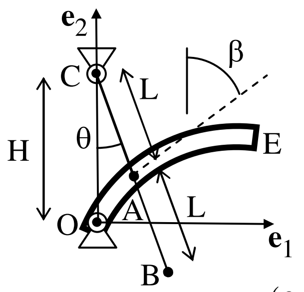
תרגיל 7.1

ברגע הנתון הזרוע המעוגלת OE סובבת בניגוד לכיוון השעון סביב ציר O קבוע במהירות זוויתית $\dot{\phi} = 2[\mathrm{rad/s}]$.

הזיז A מחבור לזרוע BC שמסתובב סביב ציר C. הזיז A מחליק במסילה של הזרוע OE. β היא הזווית בין משיק העקום OE בנקודה A, לבין האנך $\mathbf{e}_2$.

דרוש למצוא את וקטור המהירות של הנקודה B.

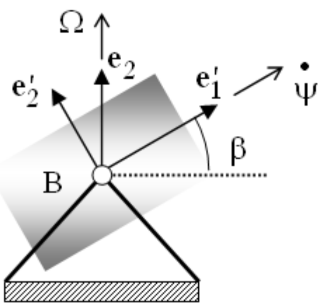
ברגע הנתון: $\theta = 30^\circ, \beta = 45^\circ, \mathrm{H} = 280\mathrm{mm}, \mathrm{L} = 120\mathrm{mm}$



תשובה: $\mathbf{v}_B = -\left(2.234\mathbf{e}_1 + 1.290\mathbf{e}_2\right)\ [m/s]$

תרגיל 7.2

בסכימה מתואר מתקן לאמון אסטרונאוטים. תוף B ממוסב על ציר אופקי במסגרת אשר מסתובבת סביב ציר אנכי $\boldsymbol{e}_2$ במהירות זוויתית Ω. זווית ציר התוף ביחס לאופק היא β. בתוך התוף נמצא תא האימון אשר מסתובב סביב הציר $\boldsymbol{e}_1'$ במהירות זוויתית $\dot{\psi}$ יחסית לתוף. בניסוי מסוים נמדדו הגדלים הבאים: $\beta = 0,\ \dot{\beta} = 0.9\ rad/s, \Omega = 0.2\ rad/s, \dot{\psi} = 0.9\ rad/s$. באותו רגע זה נתון גם ש: $\ddot{\psi} = \ddot{\beta} = \dot{\Omega} = 0$. דרוש: לקבוע את וקטורי המהירות הזוויתית $\boldsymbol{\omega}$ ואת התאוצה הזוויתית $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ של תא האימון.

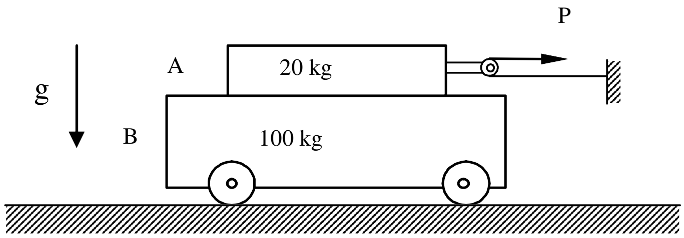


תשובה: $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0.18\boldsymbol{e}_1' + 0.81\boldsymbol{e}_2' - 0.18\boldsymbol{e}_3'\ \left[rad/s^2\right]$, $\boldsymbol{\omega} = 0.9\boldsymbol{e}_1' + 0.2\boldsymbol{e}_2' + 0.9\boldsymbol{e}_3'\ [rad/s]$

<u>תרגיל 7.3</u>

נתונה מערכת בה שתי מסות, המסה העליונה $m_1 = 20\,kg$ והמסה התחתונה $\mathrm{m}_2 = 100\ \mathrm{kg}$. מקדם החיכוך בין שתי המסות הוא $\mu = 0.5$. המסה התחתונה נעה על גלגלים חסרי חיכוך וחסרי מסה. למסה העליונה מחוברת גלגלת (חסרת חיכוך) שסביבה מלופף חוט המחובר בקצה אחד לקיר ובקצה השני פועל כוח P כפי שניתן לראות בציור. דרוש:

1. שרטט על אותו גרף את התאוצות של המסות A ו B כנגד הכוח P.
2. קבע את גודל התאוצות של כל אחת מהמסות עבור שני המקרים הבאים: א. $P = 40$ N ב. $P = 60$ N.



תשובות: א. $|\boldsymbol{a}_A| = |\boldsymbol{a}_B| = 0.67\ m/s^2$ ב. $|\boldsymbol{a}_A| = 1.095\,m/s^2, |\boldsymbol{a}_B| = 0.981\,m/s^2$

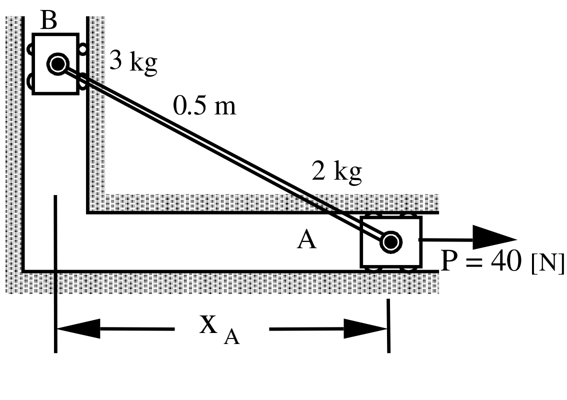
<u>תרגיל 7.4</u>

המסות A ו- B מחוברות ע"י מוט קשיח AB שאורכו $L = 0.5$ m. המסות נעות בתוך מסילות חסרות חיכוך וניתן להזניח את כוח הכובד. ידוע שכאשר המסה A נמצאת במרחק $x_A = 0.4\ m$ כפי שמתואר בציור מהירותה הייתה $v = 0.9\ m/s$ ימינה. דרוש לחשב:

א. את התאוצה של כל אחת משתי מהמסות.

ב. את כוח המתיחה T במוט AB.

תשובות: א. $a_A = 1.364\,m/s^2$, $a_B = -9.32\ m/s^2$ ב. $T = 46.59$ N



תרגיל בית 8

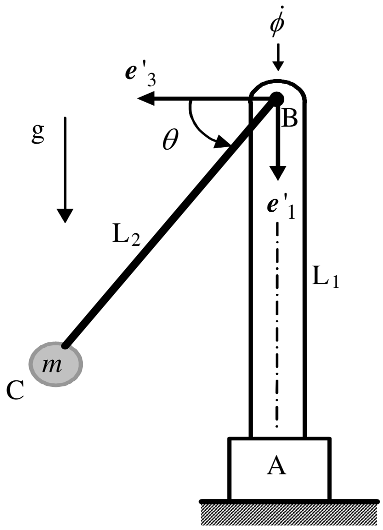
<u>תרגיל 8.1</u>

מנוע A מסובב ציר אנכי AB במהירות זוויתית קבועה $\dot{\phi}$. בנקודה B מחובר לציר AB, מנוע נוסף אשר מסובב את המוט BC במהירות זוויתית קבועה $\dot{\theta}$. בנקודה C מחוברת מסה נקודתית m. המידות הגיאומטריות מפורטות בציור. מערכת $\boldsymbol{e}'_i$ צמודה לציר הסיבוב AB. דרוש:

א. מצא את וקטור התאוצה של מסה m .

ב. מהו הכוח שמפעיל המוט BC על המסה m.

ג. מהו ווקטור כוח הגזירה שמפעילה המסה על המוט BC.



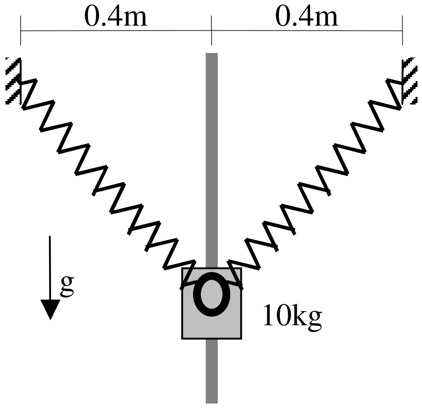
תשובות:

א. $\boldsymbol{a} = L_2\left[-\dot{\theta}^2 L_2 \sin\theta\, \boldsymbol{e}'_1 + 2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta\, \boldsymbol{e}'_2 - \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\right)\cos\theta\, \boldsymbol{e}'_3\right]$

ב. $\boldsymbol{F} = m\left(\boldsymbol{a} - g\,\boldsymbol{e}'_1\right)$

<u>תרגיל 8.2</u>

מסה בת 10 kg יכולה להחליק ללא חיכוך לאורך מוט אנכי. למסה מחוברים שני קפיצים זהים ובעלי אותו קבוע קפיץ $k = 800 N/m$ ואורך חופשי 0.3 m. במצב ההתחלתי היו הקפיצים במצב אופקי באורך 0.4 m ומהירות המסה כלפי מטה הייתה: $v = 2.0\ [m/s]$. דרוש:



א. קבע את המרחק המכסימלי אליו תגיע המסה.

ב. מהי מהירות המסה ברגע שהיא עוברת את חצי המרחק.

תשובות: א. 0.45m ב. $2.46\ m/s$

<u>תרגיל 8.3</u>

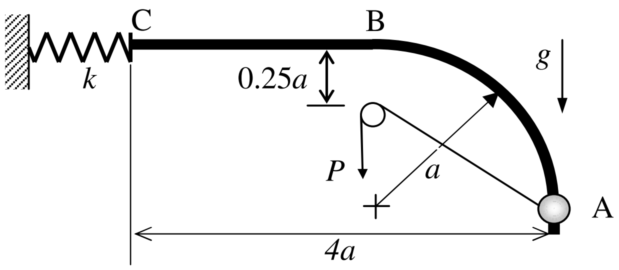
על חרוז בעל מסה $m = 10\ kg$ מופעל כוח קבוע $P = 250N$ ע"י חוט העובר דרך גלגלת קטנה חסרת חיכוך, כפי שמתואר בציור. החרוז נע מנקודה A בה הוא נמצא במצב מנוחה עד לנקודה B על גבי מסלול רבע מעגלי <u>ללא חיכוך</u>. מנקודה B הכוח P מפסיק לפעול והחרוז נע על גבי מסלול אופקי עם מקדם חיכוך $\mu = 0.5$ עד לנקודה C. בנקודה C החרוז מתנגש ונדבק לקפיץ חסר מסה בעל קשיחות k. נתון שרדיוס המסלול המעגלי AB הוא: $a = 2.4m$.

א. חשב את עבודת הכוח P ממצב A למצב B.

ב. מצא את מהירות החרוז בנקודה B.

ג. חשב את עבודת כוח החיכוך ממצב B למצב C.

ב. מצא k עבורו ההתכווצות המקסימלית של הקפיץ היא $\delta_{max} = 10cm$.



תשובות: א. $W_P = 600\ J$ ב. $v_B = 8.54\ m/s$ ג. $W_\mu = -353\ J$ ד. $k = 2.33\ kN/m$

<u>תרגיל 8.4</u>

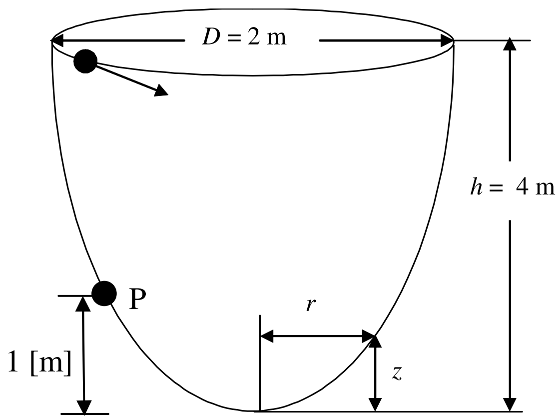
נתונה קערה פרבולית אשר מתוארת ע"י הפונקציה $z = 4r^2$. קוטר הקערה בקצה העליון הוא $D = 2.0$ [m]. פני המשטח של הקערה חלקים וחסרי חיכוך. חלקיק קטן שמסתו 1kg נזרק בכוון אופקי לחלק העליון של הקערה במהירות 3 [m/s] . דרוש:

א. לחשב את מהירות החלקיק כאשר הוא עובר בנקודה P אשר נמצאת בגובה מטר אחד מהבסיס.

ב. מה תהיה זווית הנטייה של וקטור המהירות ביחס למישור האופקי בנקודה P.

ג. מהו הכוח שמפעיל החלקיק על הקערה בנקודה P.

ד. רשום משוואה שממנה אפשר למצוא את משך הזמן עד שהחלקיק יגיע לנקודה P.



תשובות: א. $|\mathrm{v}| = 8.2366$ m/s ב. $\alpha = \pm 41.65^\circ$ ג. $|\mathrm{F}| = 75.86$ N

תרגיל בית 9

<u>תרגיל 9.1</u>

מסה נקודתית m מחוברת לקצה A של חוט שאורכו l וקצהו השני מקובע אל נקודה B שנמצאת בראשו של העמוד האנכי הקבוע BC. ברגע $t = 0$ $\dot{\theta}(0) = 0$ והחוט נטוי בזווית $\theta(0) = \theta_0$ ביחס לאנך. ברגע זה נותנים לו מהירות התחלתית אופקית שגודלה v_0 (בכיוון $-\mathbf{e}'_3$). כתוצאה מכך מתחילה תנועה של המסה. הזויות θ ו- ϕ מוגדרות בציור. בפתרון יש להשתמש במערכות הצירים כפי שמוגדרות בציור. $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$ ו- $(\boldsymbol{e}''_1, \boldsymbol{e}''_2)$ נמצאים במישור אנכי שמסתובב במהירות זוויתית $\dot{\phi}$. דרוש:

א. האם נשמר התנע הקווי בכיוון $\mathbf{e}'_3$?

ב. האם נשמר התנע הזוויתי ביחס ל- B בכיוון $\mathbf{e}''_3$?

ג. האם נשמר התנע הזוויתי ביחס ל- B בכיוון $\mathbf{e}''_1$?

ד. האם החוט מבצע עבודה על המסה?

ה. מהו התנע הזוויתי ביחס ל- B בכיוון $\mathbf{e}''_1$?

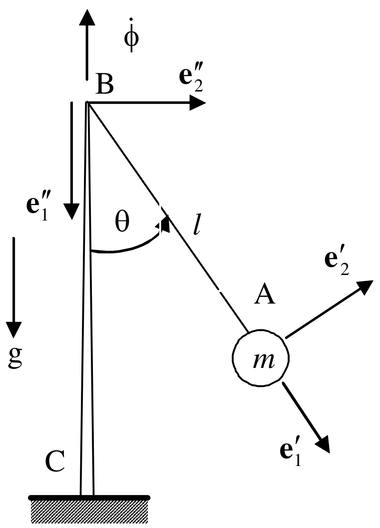
ו. מהי האנרגיה הקינטית של החלקיק?

ז. מהו הביטוי עבור $\dot{\phi}$?

ח. מהו הביטוי עבור $\dot{\theta}$?

ט. מהי תאוצת המסה בכיוון $\mathbf{e}'_2$?

י. מהי המתיחות בחוט?



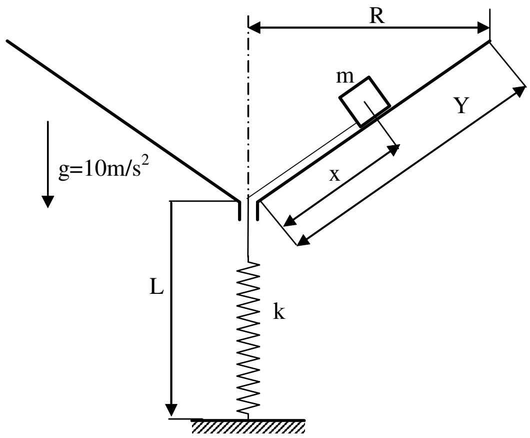
תרגיל 9.2

חלקיק ($m = 2kg$) קשור לקפיץ ($k = 30$ N/m) נמצא בתוך משפך קוני חסר חיכוך שרדיוס בסיסו $R = 3m$ ואורך קו היוצר $Y = 5m$. הקפיץ רפוי כאשר החלקיק נמצא בתחתית הקונוס. בזמן $t = 0$ החלקיק נמצא במרחק $x_0 = 4m$ מהקצה התחתון של הקונוס ומהירותו $v_0 = 3\ m/s$ בכוון היקפי. דרוש:

א. רשום משוואה ממנה אפשר למצוא את מרחק החלקיק כפונקציה של הזמן, $x(t)$.

ב. מצא את המרחק המינימלי מתחתית הקונוס אליו יגיע החלקיק.

ג. מה תהיה מהירות החלקיק במרחק המינימלי?



תשובות:

א. $\dot{x}^2 + \left(\frac{12}{x}\right)^2 + 16x + 15x^2 = 313$

ב. $x_{min} = 0.7\,m$

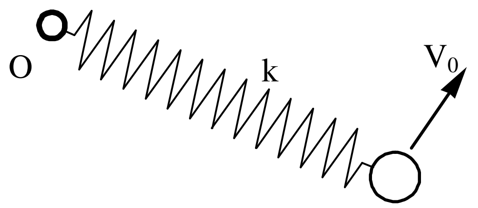
ג. $v_{max} = 17.14$ [m/s]

תרגיל 9.3

מסה m מונחת ללא תנועה על שולחן אופקי חסר חיכוך, קשורה ע"י קפיץ בעל מקדם k ואורך חופשי r_0 לנקודה קבועה O. ברגע $t = 0$ אורך הקפיץ הוא r_0, מקנים למסה מהירות v_0 בכוון ניצב לקפיץ. דרוש:

א. האם התנע הקווי, התנע הזוויתי והאנרגיה הכוללת נשמרים?

ב. תאר במילים את התנהגות המסה עם הזמן.



<u>תרגיל 9.4</u>

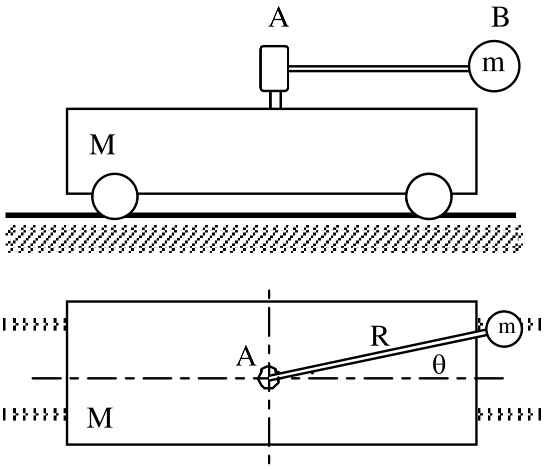
עגלה שמסתה M נעה על מסילה. על העגלה מורכב מוט אופקי AB שמסתו זניחה ואורכו R. המוט מורכב על ציר חסר חיכוך כך שהוא חופשי להסתובב סביב ציר אנכי. לקצה B של המוט מחוברת מסה נקודתית m, ניתן להזניח חיכוך בין העגלה למסילה. תנאי התחלה: מהירות העגלה $\dot{x}(0) = v$, מקום המוט $\theta(0) = 0$ והמהירות הזוויתית של המוט $\dot{\theta}(0) = \omega_0$. הערה: מפני שלא מופעל מומנט בנקודה A, ומפני שהמוט חסר מסה ורק יכול להעביר כוח צירי בין A ל- B, ניתן להתייחס למערכת כמערכת חלקיקים. את התוצאות יש לרשום בעזרת הנתונים: ω_0, M, R, v, m. דרוש לחשב את:

א. מהירות העגלה כאשר $\theta = \pi$?

ב. המהירות הזוויתית של המוט כאשר $\theta = \pi$?

ג. המהירות הזוויתית המכסימלית והמינימלית של המוט?

ד. המהירות המכסימלית והמינימלית של העגלה?



תשובות: א. $v_A(\theta = \pi) = v$ ב. $\dot{\theta}(\theta = \pi) = \omega_0$ ג. $\dot{\theta}_{\min} = \omega_0$; $\dot{\theta}_{\max} = \omega_0 \sqrt{\frac{M+m}{M}}$

ד. $\dot{x}_{\min}\big|_A = v - \frac{R\omega_0 m}{\sqrt{M(M+m)}}$; $\dot{x}_{\max}\big|_A = v + \frac{R\omega_0 m}{\sqrt{M(M+m)}}$

תרגיל בית 10

תרגיל 10.1

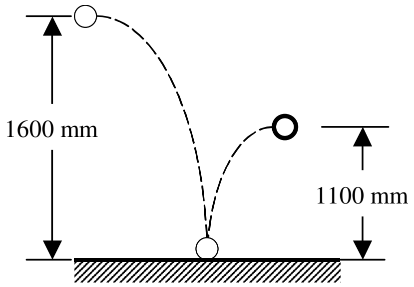
בבדיקת כדורי טניס פוסלים כדור אם מתברר שהוא איננו קופץ חזרה לפחות לגובה המותניים כאשר הוא משוחרר מגובה הכתף. יש להניח שהגבהים הם כפי שמתואר בציור.

דרוש:

א.מהו מקדם התקומה המינימלי כדי שהכדור לא יפסל.

ב.מה יהיה הפסד האנרגיה המכסימלי של כדור שלא נפסל (באחוזים).

תשובות: א. $e = 0.829$ ב. $31\ \%$



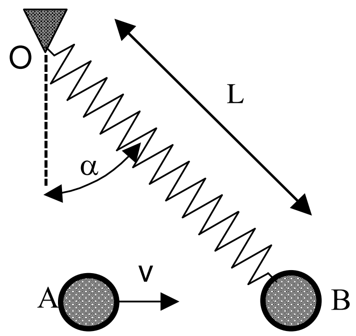
תרגיל 10.2

חלקיק A שמסתו m נע במהירות קבועה v על מישור אופקי חסר חיכוך. החלקיק מתנגש חזיתית במקדם תקומה e, בחלקיק B בעל אותה מסה m שנמצא באותו מישור. החלקיק B קשור לקפיץ שקשיחותו k אשר אורכו החופשי הוא L וקצהו השני קבוע בנקודה O שנמצאת באותו מישור. ברגע ההתנגשות החלקיק B במנוחה, הקפיץ רפוי ונתון ש- $\alpha = 45^\circ$. דרוש:

א. מצא משוואה שממנה ניתן למצוא את המרחק המכסימלי של B מנקודה O.

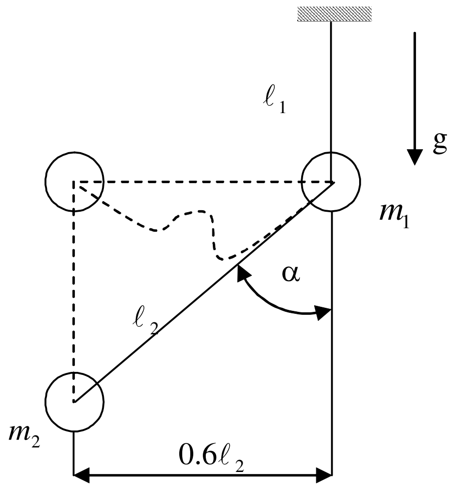
ב. מה תהיה מהירותו של חלקיק B כאשר המרחק הוא מכסימלי?

תשובות: א. $\left[L(1+e)v\cos\alpha\right]^2 + \frac{4k}{m}r^2(r-L)^2 = (1+e)^2v^2r^2$ ב. $\boldsymbol{v}_B = \frac{1}{4}\frac{L(1+e)^2 v_A\cos\alpha}{r_{max}}\boldsymbol{e}_\theta$



תרגיל 10.3

מסה נקודתית m_1 תלויה בתקרה על ידי חוט שאורכו ℓ_1. מסה m_2 קשורה אל m_1 באמצעות חוט שאורכו ℓ_2. נותנים ל-m_2 ליפול חופשית בהשפעת הגרביטציה מנקודה המרוחקת בשיעור $0.6\,\ell_2$ מ- m_1 (ראה ציור). ברגע t_0 בו מרוחקות המסות בשיעור ℓ_2, מתפתח בשני החוטים כוח מתיחה פתאומי ($\cos\alpha = 0.8, \sin\alpha = 0.6$). דרוש למצוא את המהירות של כל אחת משתי המסות **מייד לאחר** "ההתנגשות", בהנחה ששני החוטים נשארים מתוחים גם לאחר המתקף.



תשובה:

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{12m_1}{25m_1 + 9m_2}\sqrt{g\,\ell_2\cos\alpha}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \left[-12m_1\boldsymbol{e}_1 + (9m_1 + m_2)\boldsymbol{e}_2\right]\frac{\sqrt{g\,\ell_2\cos\alpha}}{25m_1 + 9m_2}.$$

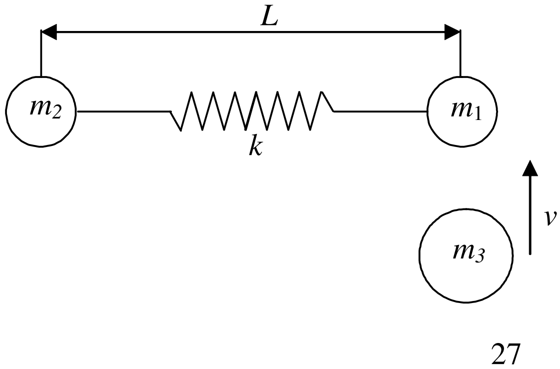
תרגיל 10.4

שלושה חלקיקים שמסתם: $m_1 = m, m_2 = 2m, m_3 = 3m$ מונחים על מישור אופקי חלק. שני החלקיקים m_1 ו- m_2 קשורים ביניהם ע"י קפיץ ליניארי בעל קשיחות k ואורך חפשי L המסות m_1 ו- m_2 נמצאות במנוחה כפי שמתואר בציור והקפיץ במצב רפוי. ברגע t = 0 פוגע חלקיק m_3 בחלקיק m_1 במהירות v, בניצב לקו המחבר את m_1 ו- m_2. מקדם התקומה בהתנגשות בין המסות m_1 ו- m_3 הוא e. דרוש:

א. מהי המהירות של כל אחד מהחלקיקים **מיד לאחר** ההתנגשות?

ב. מהי המהירות הזוויתית של הקו המחבר את m_1 ו- m_2 ברגע כלשהו לאחר ההתנגשות כתלות ב- $x(t)$ שהוא המרחק בין המסות.

ג. יש לכתוב משוואה דיפרנציאלית עבור x, ממנה ניתן למצוא את x.



תשובות:

א. $\left|\boldsymbol{v}_1\right| = \frac{3}{4}(1+e)v\ ,\ \left|\boldsymbol{v}_2\right| = 0\ ,\ \left|\boldsymbol{v}_3\right| = \frac{3-e}{4}v$

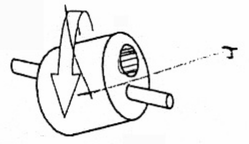
ב. $\dot{\theta} = \frac{3}{4}(1+e)v\frac{L}{x^2}$

ג. $m\frac{v_1'^2}{3} = \frac{m}{3}\dot{x}^2 + \frac{m}{3}x^2\dot{\theta}^2 + \frac{k}{2}(x-L)^2$

<u>תרגיל 10.5</u>

הרוטור המתואר בציור עשוי בעיקרו מגליל פלדה שרדיוסו R, אורכו H ובו שני קדחים גליליים שרדיוסם r, אורכם h וצירם נמצא במרחק l מציר הגליל. הרוטור מאוזן סטטית. צירו נוטה בזווית α מציר הרוטור כמתואר. הרוטור סובב במהירות זוויתית <u>קבועה</u> ω, והמרחק בין המסבים התומכים אותו L. ניתן להניח כי אחד המסבים התומכים את הרוטור אינו נושא כוחות ציריים, וכן ניתן להזניח מומנטים טהורים במסבים.

נתונים :



$\omega = 377\,rad/s$

$\rho = 7850\,Kg/m^3$

$r = 35mm$

$R = 100mm$

$h = 80mm$

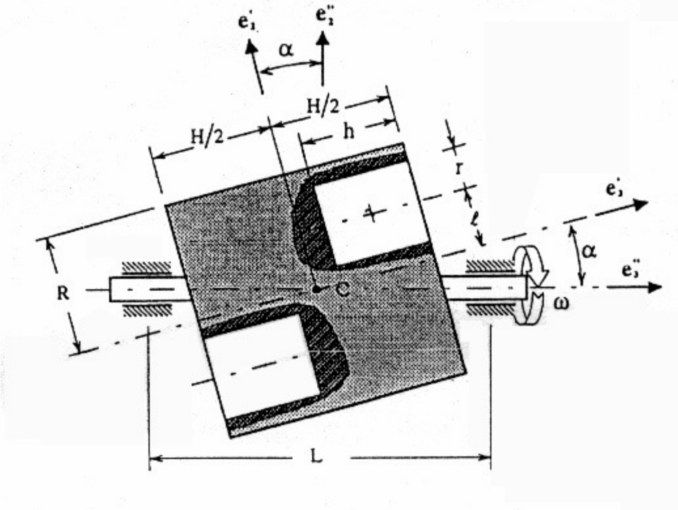
$H = 200mm$

$l = 50mm$

$L = 350mm$

$I_{33} = \frac{1}{2}mR^2$

$I_{22} = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mH^2$



כאשר מומנטי האינרציה נתונים במע' $\boldsymbol{e}_i'$ עבור גליל הומוגני מלא בעל רדיוס R, מסה m וגובה H.

1. האם קיימת זווית α כך שהריאקציה הדינאמית במסבי הרוטור תתאפס ? אם כן, מהי ?
2. אם $\alpha=30°$, מהי הריאקציה הדינאמית במסבי הרוטור ?

תרגיל בית 11

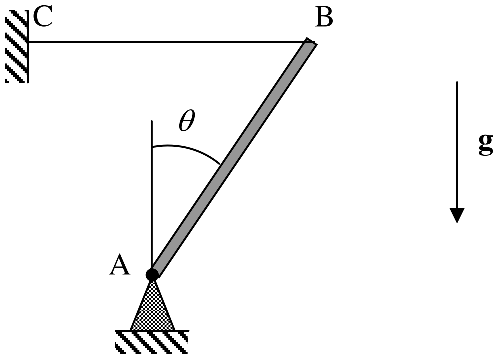
<u>תרגיל 11.1</u>

נתון מוט אחיד באורך L ומסה m מחובר בקצה A לפרק חסר חיכוך ובקצה B לחוט BC. ברגע $t = 0$ מנתקים את החוט BC. נתון שתנאי ההתחלה הם: $\dot{\theta}(0)=0, \theta(0)=\theta_0$. דרוש:

א. לרשום את המשוואה הדיפרנציאלית שבעזרתה ניתן לחשב את $\theta=\theta(t)$ (לא לפתור).

ב. לחשב את המהירות הזוויתית $\dot{\theta}$ כפונקציה של θ.

ג. למצוא את כוח הריאקציות בפרק A.



תשובה: ב. $\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right)$

<u>תרגיל 11.2</u>

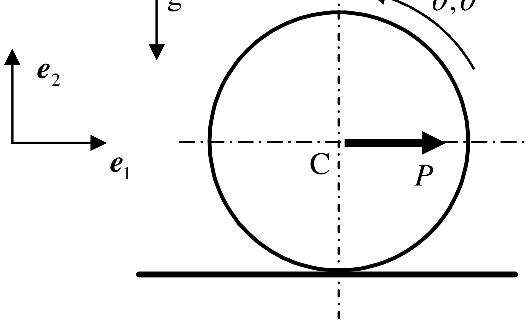
גליל (מסה m, רדיוס R) מתגלגל על מישור אופקי. מקדם החיכוך הוא μ. על מרכז הגליל C פועל כוח P קבוע בכוון $\boldsymbol{e}_1$. נתון כי תנאי ההתחלה הם: $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=-\omega_0 R$, $\theta(0)=0$ ו- $\dot{\theta}(0)=\omega_0>0$.

דרוש לחשב את $\theta(t), x(t)$ ואת גודל וכיוון כוח החיכוך בין הגליל ורצפה עבור התנאים הבאים:

א. $P=0$.

ב. $P=2\mu mg$.

ג. $P=4\mu mg$



תשובות:

א ו- ב : $\theta(t)=-\frac{1}{3}\frac{P}{mR}t^2+\omega_0 t \quad , \quad x(t)=\frac{1}{3}\frac{P}{m}t^2-\omega_0 R t$

ג. $\theta(t)=-\frac{\mu g}{R}t^2+\omega_0 t \quad , \quad x(t)=\frac{3}{2}\mu g t^2-\omega_0 R t$

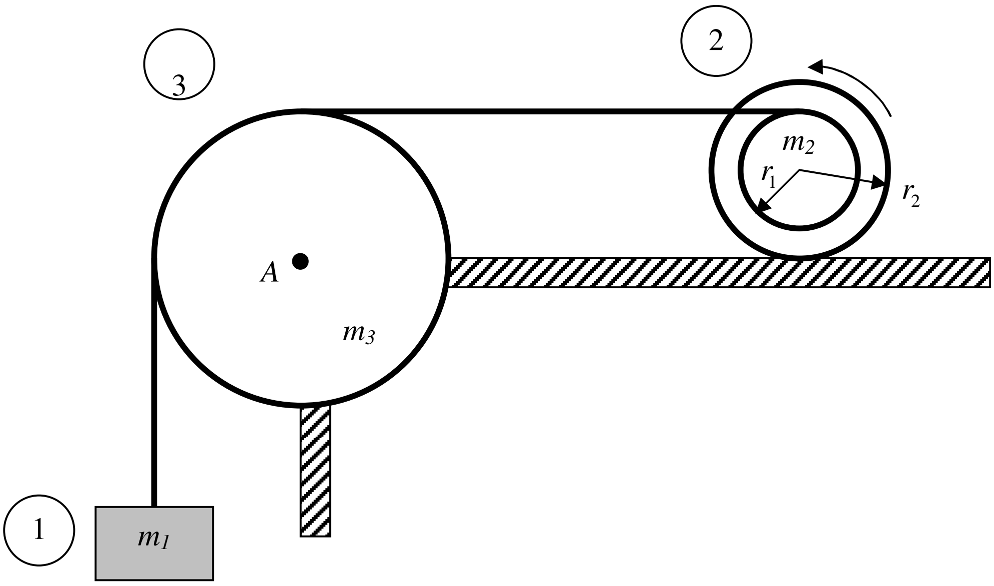
<u>תרגיל 11.3</u>

משליכים כדור באולינג בעל רדיוס R ומסה m על הקרקע במהירות אופקית v_0. נתון כי מקדם החיכוך בין הכדור והקרקע הוא μ ותנאי ההתחלה הם $\dot{\theta}(0)=0$ ו- $\theta(0)=0$. **דרוש לחשב** את המרחק S שיעבור הכדור עד שתפסק ההחלקה בינו לבין הקרקע ויתחיל גלגול טהור.

תשובה: $S=\dfrac{12{v_0}^2}{49\mu g}$.

<u>תרגיל 11.4</u>

עקב תלית המשקולת m_1, מאיץ הגלגל (2) שמאלה. הגלגל (2) כולל חישוק (רדיוס r_2) ותוף (רדיוס r_1) שמסתם המשותפת היא m_2 והאינרציה המשותפת ביחס למרכזו היא I_2. כבל מלופף על התוף ומתחבר אופקית אל הגלגלת (3) (שיש לה מסה m_3 ואינרציה I_3).ידוע שאין **החלקה** בין הכבל לבין הגלגלת (3), אין חיכוך בפרק A וגם ידוע שמקדם החיכוך בין הרצפה לגלגל (2) הוא μ.



דרוש:

א. בהנחה ש- (2) מתגלגל על המישור האופקי ללא החלקה, מהי תאוצת המשקולת (1) ?

ב. עבור הנתונים הבאים יש להראות שגליל (2) מחליק.

$$\mu=0.3,\quad I_2=6mr^2,\quad I_3=3mr^2,\quad m_1=m,\ \ m_2=m/2,\ \ r_1=r,\ r_2=2r$$

ג. עבור הנתונים הנ"ל יש למצוא את תאוצת המשקולת m_1.

תרגיל בית 12

תרגיל 12.1

גליל בעל מסה m_1 ורדיוס R מונח על גבי תיבה שמסתה m_2. מערכת זו נמצאת במנוחה עד אשר ברגע $t=0$ מסה m_3, הנעה במהירות v, פוגעת בתיבה m_2 ונדבקת אליה (התנגשות פלסטית). כמתואר בציור.

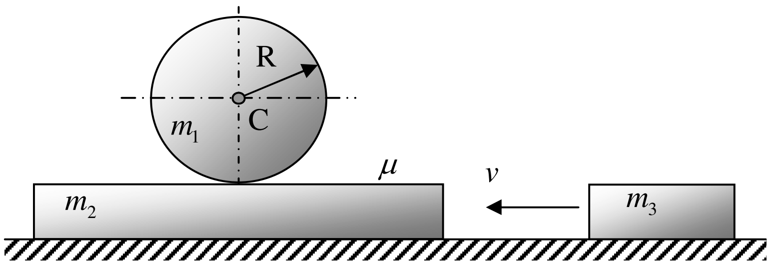
דרוש:

א. בהנחה שאין חיכוך בין התיבה והגליל ($\mu=0$), מהן המהירויות של התיבה ושל מרכז הגליל (נקודה C) מיד לאחר ההתנגשות ?

ב. בהנחה שקיימת החלקה בין הגליל m_1 והתיבה m_2 בזמן ההתנגשות ($\mu>0$), מהן המהירויות של התיבה ושל מרכז הגליל (נקודה C) מיד לאחר ההתנגשות?

ג. בהמשך לסעיף ב' (קיימת החלקה בין התיבה והגליל), חשב את הזמן שעובר עד אשר ההחלקה בין הגליל והתיבה תיפסק ויתחיל גלגול טהור ?

ד. בהנחה שקיימים גלגלי שינים בין הגליל והתיבה ($\mu=\infty$), מהן המהירויות של התיבה ושל מרכז הגליל מיד לאחר ההתנגשות?



תשובות:

ג. $$t=\frac{m_3v_0}{\mu g(3m_2+3m_3+m_1)}$$

ד.
$$\boldsymbol{\omega}=\frac{2m_3v_0}{R[m_1+3(m_2+m_3)]}\boldsymbol{e}_3 \qquad \boldsymbol{v}_2=\frac{3m_3v_0}{m_1+3(m_2+m_3)}\boldsymbol{e}_1$$
$$\hat{R}=\frac{m_1m_3v_0}{m_1+3(m_2+m_3)}\boldsymbol{e}_1 \qquad \boldsymbol{v}_C=\frac{m_3v_0}{m_1+3(m_2+m_3)}\boldsymbol{e}_1$$

תרגיל 12.2

דיסקה מלאה בעלת מסה m ורדיוס b נמצאת במגע עם מסגרת קשיחה הסובבת על מישור אופקי חלק. מקדם החיכוך בין הדסקה לבין המסגרת הוא μ. קצה אחד של מיתר (בלתי מתארך) באורך $3b$ מחובר למרכז הדסקה B, וקצהו השני מחובר למסגרת בנקודה A כמתואר בצויר. בהתחלה ($t=0$) נמצאות המסגרת והדסקה במנוחה כאשר $\theta = 0$, ואז מתחילה המסגרת להסתובב בתאוצה זוויתית קבועה ($\ddot{\theta} = p$). נתון שהכוח המרבי שהמיתר יכול לשאת הוא T_{CR}. מומנט האינרציה של דסקה מלאה סביב מרכז המסה שלה $I_B = mb^2/2$. הזנח את כוח הכובד. דרוש:

א. בהנחה ש- $\mu = 0$

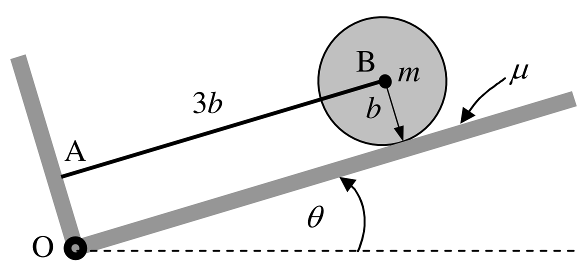
1. מהי המהירות הזוויתית של הדיסקה?
2. מהי המתיחות בחוט?
3. מהי המהירות הזוויתית של המסגרת ברגע שהדיסקה נמצאת על סף ניתוק מהמסגרת?

ב. מהו מקדם החיכוך המירבי (μ_{cr}) שעבורו הדיסקה תחליק על המסגרת מייד בתחילת התנועה $(t = 0)$?.

ג. בהנחה ש- $\mu > \mu_{cr}$, מהי המהירות הזוויתית של המסגרת ברגע שהדיסקה נמצאת על סף החלקה?

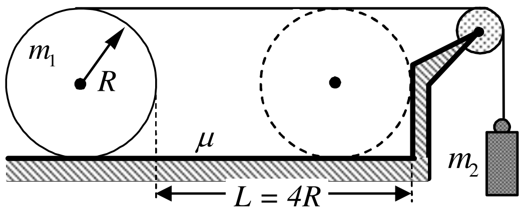
ד. אם הדיסקה לא מחליקה כלל על המסגרת:

1. מהי האנרגיה הקינטית של הדיסקה?
2. מהו התנע הזוויתי של הדיסקה סביב הנקודה הנייחת O?
3. מהי התאוצה הזוויתית המינימלית של המסגרת, שעבורה יקרע המיתר מייד עם תחילת התנועה $(t = 0)$?



<u>תרגיל 12.3</u>

בציור מתואר גליל שמסתו m_1 ורדיוסו R. הגליל מונח על מישור אופקי ומקדם החיכוך ביניהם הוא μ. על הגליל מלופף חוט שמצדו השני תלויה משקולת m_2. החוט עובר דרכך גלגלת חסרת מסה וגם חיכוך. החוט מושך את הגליל לכוון קיר אנכי חלק (חסר חיכוך). משחררים את המערכת ממצב מנוחה כשהגליל נמצא במרחק $L = 4R$ מהקיר. מקדם התקומה בין הגליל לבין הקיר הוא $e = 0.5$. דרוש:



א. אם הגליל לא מחליק מצא את התאוצה של מרכז הגליל מייד לאחר שחרור המערכת.

ב. מהו מקדם החיכוך המינימלי שמבטיח גלגול ללא החלקה.

ג. מצא את המהירות של מרכז הגליל מיד לפני ההתנגשות בקיר (בהנחה של גלגול טהור).

ד. מצא את המהירות של מרכז הגליל מיד אחרי ההתנגשות בקיר.

ה. מצא את המהירות הזוויתית של הגליל מיד לאחר ההתנגשות בקיר.

ו. האם יש החלקה בין הגליל והמישור האופקי מיד לאחר ההתנגשות. ענה "כן" או "לא" ונמק את תשובתך.

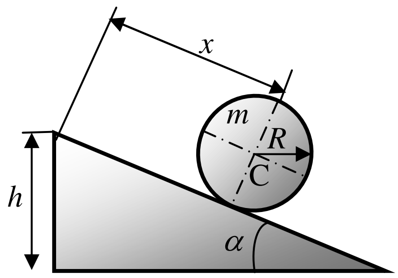
<u>תרגיל 12.4</u>

מניחים דסקה בעלת רדיוס R ומסה m על משור משופע בזוית α כמשורטט. מקדם החיכוך בין הדסקה למישור הוא μ. תניח שהמערכת מתחילה ממנוחה. דרוש:

א. עבור המקרה בו $\mu \to \infty$ חשב את תאוצת מרכז המסה ואת כוח החיכוך מייד לאחר השחרור.

ב. חשב מהו מקדם החיכוך המינימאלי עבורו לא תתרחש החלקה.

ג. פתור את משוואות התנועה עבור המקרה $\mu = 0$ ומצא את מהירותו ותאוצתו הקווית והזוויתית של הגליל בתחתית המישור.



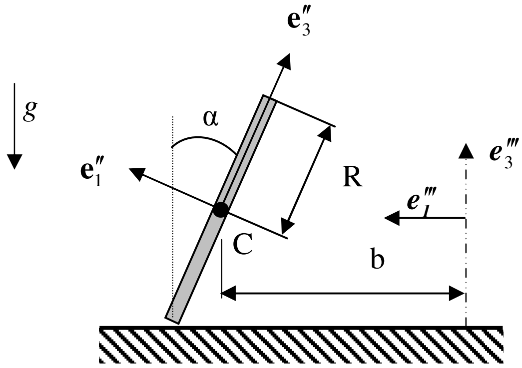
תרגיל בית 13

תרגיל 13.1

דיסקה דקה, שרדיוסה $R = 0.4$ m, ומסתה $m = 23$ kg מתגלגלת ללא החלקה על מישור אופקי בזוית נטייה α. מרכז הדיסקה C נע במסלול מעגלי שרדיוסו $b = 0.6$ m במהירות $v = 2.54\ [m/\sec]$ קבועה בכוון $\boldsymbol{e}''_2$. המערכות $\boldsymbol{e}'''_i$ ו- $\boldsymbol{e}''_i$ מסתובבות כך שהמישור $\boldsymbol{e}'''_1-\boldsymbol{e}'''_3$ נשאר אנכי ומתלכד עם המישור $\boldsymbol{e}''_1-\boldsymbol{e}''_3$. מרכז הדסקה C נשאר במישור $\boldsymbol{e}'''_1-\boldsymbol{e}'''_3$. דרוש:

א. באיזו זווית נטייה יכולה התנועה הזאת להתקיים?.

ב. מצא את הכוח שמפעילה הרצפה על הדיסקה.



תשובות : א. $\alpha = 56.201^o$

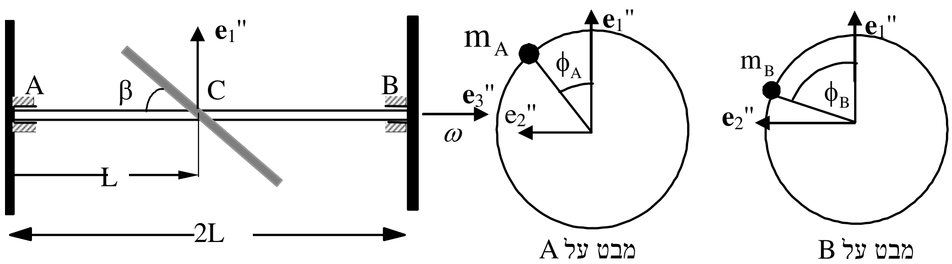
תרגיל 13.2

אל ציר (באורך $2L$), שממוסב בשני מסבים קבועים A ו- B, מרותכות שלוש דיסקות דקות ואחידות (לכל אחת מסה m ורדיוס R) כמתואר בציור בעמוד הבא. שתי דיסקות מרותכות על הציר AB בשני קצותיו כך שהציר ניצב למישור הדיסקות. הדיסקה השלישית מרותכת לציר בנקודת האמצע C, כך שהזווית בין הציר האופקי והקו שמשיק לדיסקה היא β. הציר מסתובב במהירות זוויתית קבועה ω בכוון $\mathbf{e}''_3$. כל אחד משני המסבים A ו- B נמצא בבית כדורי שמונע ממנו להעביר מומנטים כלשהם. דרוש:

א. מהוא וקטור התנע הזוויתי $\boldsymbol{H}_C$ של המערכת סביב נקודה C ?

ב. מצא את הכוחות הניצבים לציר AB שפועלים בנקודות A ו- B .

ג. רוצים לאפס את הכוחות שפועלים בנקודות A ו B ע"י חבור מסה m_A להיקף הדיסקה A ומסה m_B להיקף הדיסקה B. מצא את גודל המסות m_A ו- m_B והזוויות ϕ_A ו- ϕ_B בהן יש לחברן.



תשובות: ב. $R_B^1 = \frac{mR^2\omega^2}{8L}\sin\beta\cos\beta + \frac{3mg}{2}$, $R_B^2 = 0$

$R_A^1 = -\frac{mR^2\omega^2}{8L}\sin\beta\cos\beta + \frac{3mg}{2}$, $R_A^2 = 0$

ג. $\phi_A = \pi \, , \phi_B = 2\pi$

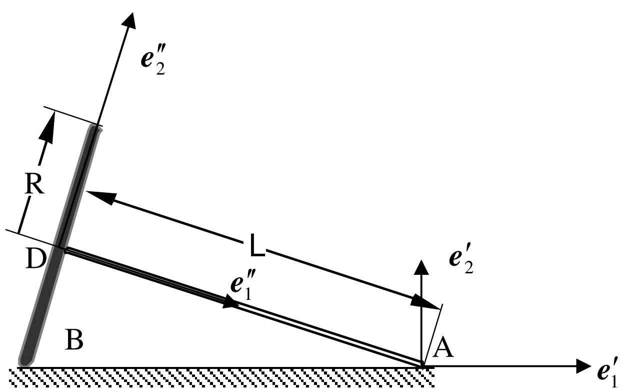
$m_A = m_B = \frac{mR}{8L}\sin\beta\cos\beta$

<u>תרגיל 13.3</u>

גוף קשיח מורכב מדיסקה דקה ברדיוס R ומסה m, וממוט דק באורך L ומסה m, המחובר למרכז הדיסקה וניצב לה. הגוף נמצא במנוחה על רצפה (ראה ציור). ברגע $t = 0$ מקנים לנקודה D (מרכז הדיסקה) מהירות v_0 בכוון ניצב לדף . <u>נתון</u>: אין החלקה בכל נקודות המגע של הגוף עם המשטח שמתחתיו. מערכת צירים $\{e_i''\}$ צמודה למוט AD וסובבת במהירות זוויתית $\dot{\Psi}$, בזווית נטייה α ביחס למערכת $\{e_i'\}$ שהיא גם מסתובבת במהירות זוויתית $\dot{\Psi}$. כתוב בטויים עבור הגדלים הבאים:

א. המהירות והתאוצה הזוויתית $\boldsymbol{\omega}(t)$ ו-$\dot{\boldsymbol{\omega}}(t)$ של הגוף.

ב. הכוחות שמפעילה הקרקע על הגוף בנקודות המגע.

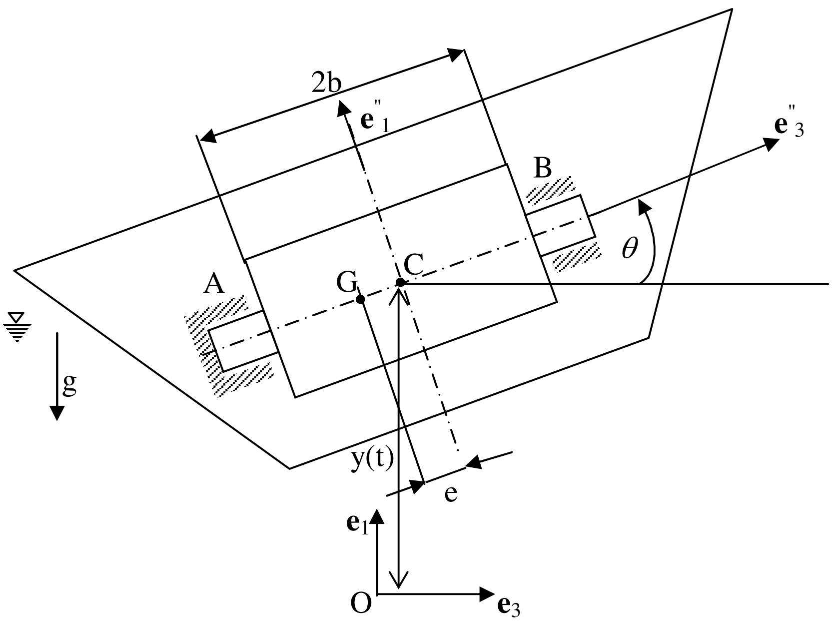


תשובה : א. $\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\frac{{v_0}^2}{L^2\cos\alpha\sin\alpha}\boldsymbol{e}_3'$, $\boldsymbol{\omega} = \frac{v_0}{L\sin\alpha}\boldsymbol{e}_1'$

<u>תרגיל 13.4</u>

אוניה מתנדנדת במישור אנכי כך שהתזוזה האנכית של הנקודה C היא $y = A\cos(pt)$. כמו כן התנודה הזוויתית ("עלה ורד") היא $\theta = B\sin(pt)$. באוניה יש טורבינה. מומנטי האינרציה של הרוטור ביחס ל-C: פולארי I_p , רחבי I_t . מהירות הסיבוב של הטורבינה במסבים היא n. הנקודה C ומרכז המסה G של הרוטור נמצאים על ציר הסיבוב. יש גרוויטציה. כל אחד משני המסבים A ו- B נמצא בבית כדורי שמונע ממנו להעביר מומנטים כלשהם. מסב A יכול להפעיל כוח בכוון ציר הטורבינה AB ומסב B לא יכול להפעיל כוח בכוון זה.

דרוש למצוא את רכיבי הכוחות שמפעילים המסבים על הטורבינה במערכת e''_i הצמודה לאוניה.



נתונים:

$$m = 100kg \;;\; I_p = 15kg - m^2 \;;\; I_t = 30kg - m^2 \;;\; b = 0.8m$$

$$m \;;\; n = 30000rpm \;;\; A = 2m \;;\; B = 0.2rad \;;\; p = 3rad/s$$

תשובות :

$$R_1^{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{b}\ddot{\theta}\left(I_p + me^2\right) + mg\cos\theta + \ddot{y}\cos\theta - \ddot{\theta}\,e - \left(e + \ddot{y}\right)mg\cos\theta + \ddot{\theta}\,e^2\right]$$

$$R_1^{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{b}\ddot{\theta}\left(I_p + me^2\right) + mg\cos\theta + \ddot{y}\cos\theta - \ddot{\theta}\,e + \left(e + \ddot{y}\right)mg\cos\theta - \ddot{\theta}\,e^2\right]$$