35

הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה להנדסת מכונות

מערכות ליניאריות

פרופ' ז. פלמור

יוני 1989

מבוא

המקצוע מערכות ליניאריות הוכנס כקורס חובה בלמודי הסמכה של הפקולטה להנדסת מכונות בשנת תשמ"ב. זהו מקצוע יסוד שמטרתו להקנות מושגים, כלים ויסודות מתמטיים המאפשרים לנתח באופן שיטתי את התכונות והתגובות של מערכות דינמיות ליניאריות. המקצוע מהווה קורס שירות למקצועות כמו דינמיקה, תנודות ובקרה. יחודו של המקצוע הוא בהצגת גישות לטיפול במערכת הכוללת. מערכת זו עשויה להיות מורכבת ממספר יחידות דינמיות. גישות אלו מתאימות למערכות משטחי מדע והנדסה שונים.

בספרות הענפה הקימת בנושא המערכות, מוצג הנושא מזויות ראיה והדגשים של דיסציפלינות אחרות, ובדרך כלל כחלק בלתי נפרד ממערכות משוב.

חסרונו של ספר לימוד מתאים מקשה על הלומדים ב"עכול" החומר. עובדה זו הביאה את מורי המקצוע להפצת חומר ההרצאות בסמסטרים הראשונים לנתינתו. חלקו הראשון של הקורס (פרקים 5 - 1) הוצא כחוברת א' בספטמבר 1982 וחלקו השני של הקורס (פרקים 9 - 6) הוצא כחוברת ב' במרץ 1983 . מאז עבר הקורס מערכות ליניאריות שינויים ועדכונים. כתוצאה מכך נכתבה חוברת א' מחדש (אוקטובר 1988). גם פרקים 9 - 6 נכתבו מחדש ועודכנו ונכללים בחוברת זו. לחוברת זו הוכנס פרק נוסף (פרק 10) אשר החל משנת הלימודים תשמ"ט כלול בחומר הלימוד ב"מערכות ליניאריות" עקב השינוי ב"מעמדו" של המקצוע "תנודות".

החוברת הנוכחית כוללת את הפרקים 10 - 1 בצורה ובהיקף כפי שניתנו בהרצאותי בשנתיים האחרונות.

יוני 1989

ז. פלמור

(*) תיקוני דפוס (פברואר 1993).

תוכן

תוכן (המשך)

תוכן (המשך)

פרק 1 : מערכות - תכונות ומודלים מתמטיים

1.1 **מבוא**

קורס זה עוסק בהגדרת מושגים ובפתוח כלים לניתוח ולהבנתן של מערכות דינמיות פיזיקליות ואחרות. מערכות דינמיות מופיעות במגוון רחב מאד של שטחים. המושגים, הרעיונות והכלים שנפתח בקורס זה משחקים תפקיד חשוב ביותר בשטחי המדע והטכנולוגיה השונים כמו במכונות, דינמיקה, רובוטים, תהליכי יצירת אנרגיה, בבקרת תהליכים כימיים, באוירונוטיקה, בתהליכים ביולוגיים, בתקשורת, בעבד אותות, בנהוג טילים וכו'.

למרות שהמערכות בשטחי ההנדסה והטכנולוגיה השונים שונות לחלוטין, ניתן להציגן בצורה אחידה וכללית. לכל המערכות תכונה אחת משותפת - כל מערכת מגיבה לאותות כניסה (שמות נרדפים: סיגנלי כניסה, משתני כניסה ובקצור **כניסות** (inputs)) ומיצרת אותות יציאה (שמות נרדפים: תגובות, סיגנלי יציאה, משתני יציאה ובקצור **יציאות** (outputs)).

אות הוא פונקציה של משתנה (או מספר משתנים) בלתי תלוי ובדרך כלל מכיל אינפורמציה על התנהגות תופעה פיזיקלית מסוימת.

את המושגים הבסיסיים הנ"ל ניתן להדגים בדוגמה הפשוטה הבאה: נהג הנוהג במכונית ולוחץ על דוושת הדלק גורם למכונית להגביר מהירותה. בדוגמה זו, המכונית היא המערכת, הלחיצה על דוושת הדלק (כפונקציה של הזמן) היא הכניסה, ואילו מהירותה של המכונית היא היציאה.

במסגרת הקורס אנו נציג ונפתח שיטות לניתוח הן של מערכות רציפות והן של מערכות בדידות. בעבר, עקב השימושים השונים של מערכות רציפות ובדידות, נלמדו ופותחו מערכות אלו בנפרד. ההתפתחות האדירה של מחשבים מהירים בעשורים האחרונים הביאה לשמושים הולכים ורבים בהם משולבות מערכות רציפות ובדידות יחדיו. הדמיון הרב בכלים המטפלים בשני סוגי המערכות והשמוש הגובר והולך בשלובן בישומים הנדסיים מביאים באופן טבעי לצורך ללמד ולהכיר את שני סוגי המערכות ואת הכלים המשמשים לנתוחן ולתכנונן.

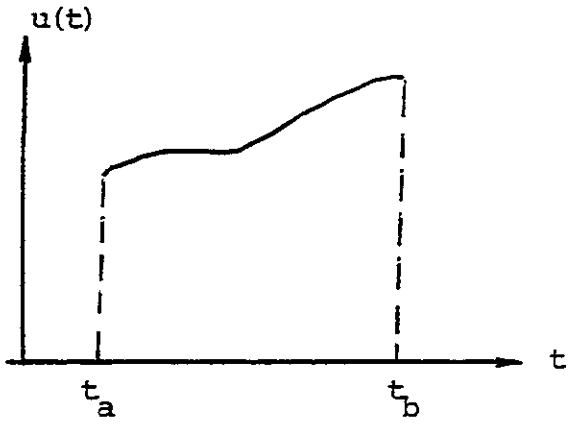
במסגרת הקורס, אנו נעסוק במקביל בשני סוגי המערכות.

1.2 **אותות**

1.2.1 כללית, מתאר אות את השתנותה של תופעה פיסיקלית. מתמטית מתוארים אותות כפונקציה של משתנה או משתנים בלתי תלויים. השתנות הלחץ הברומטרי כפונקציה של הגובה; השתנות מהירות הרוחות עם המרחק מפני כדור הארץ או המהירות, כפונקציה של הזמן, של המסה במערכת מכנית הכוללת מסה קפיץ ומרסן - הן דוגמאות של אותות.

בקורס זה יהיו האותות פונקציה של משתנה בלתי תלוי יחיד. בדרך כלל יהיה זה הזמן, t, עבור מערכות רציפות או הזמן הבדיד: t_i (או nT) במערכות בדידות.

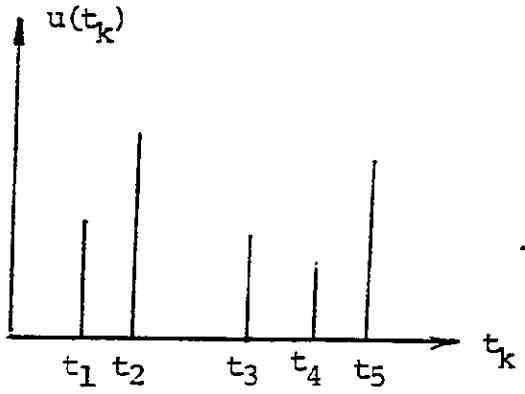
1.2.2 קימים שני סוגים בסיסיים של אותות - אותות רציפים ואותות בדידים (דיסקרטיים). **באות רציף** המשתנה הבלתי תלוי הינו רציף והאות מוגדר עבור כל ערכי המשתנה הבלתי תלוי לפחות בתחום מסוים.



בציור 1.1 מוראה אות רציף u כפונקציה של המשתנה הבלתי תלוי t. u מוגדר עבור כל ערך של t בתחום $t_a < t < t_b$.

ציור 1.1

אות בדיד הוא אות המוגדר רק בערכים בדידים של המשתנה הבלתי תלוי. המשתנה הבלתי תלוי מקבל אך ורק ערכים בדידים.



בציור 1.2 מתואר אות בדיד $u(t_k)$, האות מוגדר רק בערכים הבדידים t_k. מדד המחירים לצרכן המתפרסם פעם בחודש הוא דוגמה לאות בדיד. למדד המחירים אין ערך בכל רגע אלא פעם בחודש.

ציור 1.2

1.3 **מערכות**

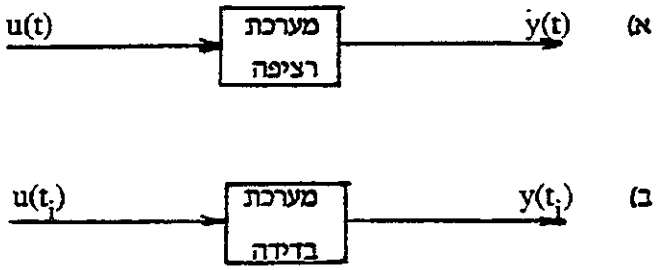
1.3.1 על מערכת דינמית ניתן להביט כתהליך המבצע טרנספורמציה של אותות. למערכת, לכן, כניסות ויציאות הקשורות באמצעות המערכת.

1.3.2 מערכת בה כניסות רציפות מיצרות יציאות רציפות תקרא **מערכת רציפה**. מערכת בה כניסות בדידות מיצרות יציאות בדידות תקרא **מערכת בדידה**.

1.3.3 מערכת רציפה, בעלת כניסה אחת, $u(t)$, ויציאה אחת, $y(t)$, תסומן סכמטית כבציור 1.3 א' ומערכת בדידה בעלת כניסה אחת, $u(t_i)$, ויציאה אחת, $y(t_i)$, תסומן סכמטית כבציור 1.3 ב'. t הוא המשתנה הרציף הבלתי תלוי במערכת הרציפה ו-t_i הוא המשתנה הבדיד הבלתי תלוי במערכת הבדידה. סימון מקביל, אקוויולנטי, במערכות בדידות הוא u_i במקום $u(t_i)$ וכאשר האינטרבלים $t_{i+1}-t_i$ קבועים כך ש-

$$t_{i+1}-t_i = T \qquad -\infty < i < \infty \tag{1.1}$$

נהוג לסמן $u(iT)$ במקום u_i (או $u(t_i)$).



ציור 1.3

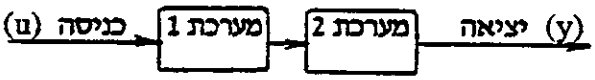
1.3.4 מערכת בעלת כניסה אחת ויציאה אחת תקרא להלן מערכת SISO (Single Input - Single Output) ומערכת מרובת כניסות ויציאות תקרא להלן מערכת MIMO (Multi-Input - Multi-Output).
במערכת MIMO אין מספר היציאות זהה בהכרח למספר הכניסות .

1.3.5 <u>תבור מערכות</u>

על ידי תבורן של מערכות קימות ניתן לקבל מערכות חדשות מורכבות ולהפך, הבנת נושא התבור מאפשרת לנו לנתח מערכת מורכבת על ידי פרוקה לרכיביה הפשוטים יותר. קיימים מספר תבורים יסודיים:

א. תבור טורי.

התבור הטורי של שתי מערכות מתואר בציור 1.4. היציאה ממערכת 1 משמשת כניסה למערכת 2. באופן דומה ניתן לתבר טורית שלוש או יותר מערכות.

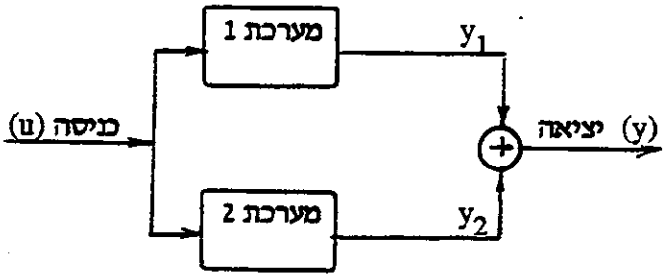


ציור 1.4

הערה: ציור מסוג ציור 1.4 נקרא <u>דיאגרמת בלוקים</u>.

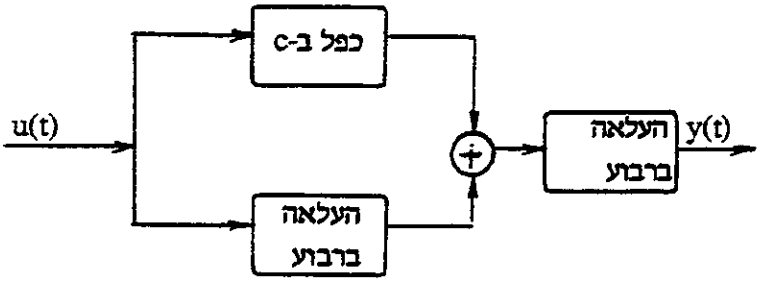
ב. תבור מקבילי

דיאגרמת בלוקים של תבור מקבילי של שתי מערכות מתוארת בציור 1.5. לשתי המערכות אותה כניסה ויציאותיהן של המערכות מסוכמות על ידי המסכם ונותנות את היציאה y ($y = y_1 + y_2$).



ציור 1.5

דוגמא: בציור 1.6 מתוארת מערכת המבצעת פעולה אריתמטית מורכבת יחסית על ידי תבור מערכות המבצעות פעולות אלגבריות פשוטות.

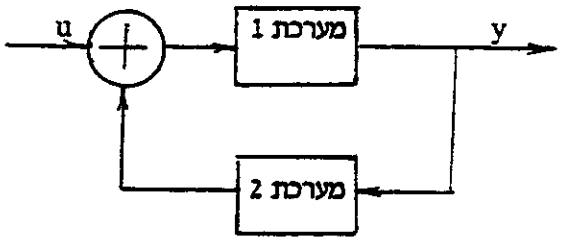


ציור 1.6

היציאה $y(t)$ בציור 1.6 נתונה על ידי: $y(t) = (c\,u(t) + u(t)^2)^2$

ג. תבור משובי

תבור משובי מתואר בציור 1.7. יציאת מערכת 1 משמשת ככניסה למערכת 2. יציאת מערכת 2 יחד עם הכניסה החיצונית, u, מהוות כניסה למערכת 1. תבור משובי הוא אבן יסוד במערכות בקרה.

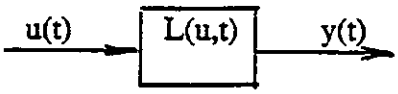


ציור 1.7

על משמעותם של החיבורים והכלים לטיפול בהם נדון בפרקים מאוחרים יותר.

1.3.6 תכונות בסיסיות של מערכות

את פעולת המערכת על הכניסה u ליצירת היציאה y נסמן על ידי האופרטור L (ראה ציור 1.8). כך ש:



$$y(t) = L(u, t) \qquad (1.2)$$

ציור 1.8

נגדיר להלן מספר תכונות בסיסיות של מערכות.

1.3.6.1 ליניאריות

הגדרה: מערכת (רציפה או בדידה) תקרא מערכת ליניארית באם היא מקימת את תנאי ההומוגניות ותנאי הסופרפוזיציה.

תנאי ההומוגניות:

אם יציאת (תגובת) המערכת לכניסה u_1 היא y_1 דהיינו : $y_1 = L(u_1)$ אזי המערכת מקימת את תנאי ההומוגניות אם יציאתה y_2 לכניסה $u_2 = \alpha u_1$, היא $y_2 = L(u_2) = \alpha y_1$ לכל הכניסות u_1 ולכל הקבועים α.

תנאי הסופרפוזיציה:

אם y_1 היא יציאת המערכת לכניסה u_1 $(y_1 = L(u_1))$

ואם y_2 היא יציאת המערכת לכניסה u_2 $(y_2 = L(u_2))$

אזי המערכת מקימת את תנאי הסופרפוזיציה באם יציאתה y לכניסה $u = u_1 + u_2$

תהיה $y = L(u = u_1 + u_2) = y_1 + y_2$ לכל u_1 ו-u_2.

בבדיקת הליניאריות של מערכת ניתן לחבר את שני התנאים ולהשתמש ב<u>הגדרה</u> הבאה: מערכת תקרא ליניארית באם הכניסה המשוקללת $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ מיצרת יציאה y הנתונה על ידי:

$$y = L(u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \qquad (1.3)$$

עבור כל הכניסות u_1 ו-u_2 וכל הקבועים α_1 ו-α_2 כאשר y_i היא יציאת המערכת לכניסה u_i $(y_i = L(u_i))$ $i = 1,2$.

1.3.6.2 <u>דוגמאות</u>:

1) נתונה המערכת הרציפה הבאה $y(t) = t\dot{u}(t)$. ($\dot{u}$ היא סמון מקובל ל-$du(t)/dt$). נשתמש בתנאי (1.3) ונבדוק האם המערכת ליניארית.

עבור $u_1(t)$ נקבל: $y_1(t) = t\dot{u}_1(t)$

ועבור $u_2(t)$ נקבל: $y_2(t) = t\dot{u}_2(t)$

נבדוק עתה באם המערכת הנ"ל מקימת עבור הכניסה $u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)$ את תנאי (1.3):

$$y(t)=t\dot{u}(t)=t\frac{d}{dt}(\alpha_1 u_1(t)+\alpha_2 u_2(t))=\alpha_1 t\dot{u}_1+\alpha_2 t\dot{u}_2=\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2$$

מסקנה: המערכת ליניארית.

2) נתונה המערכת הרציפה: $y(t)=u(t)\dot{u}(t)$. האם זו מערכת ליניארית?

u_i $(i=1,2)$ מיצר $y_i(t)=u_i(t)\dot{u}_i(t)$. עבור $u(t)=\alpha_1 u_1(t)+\alpha_2 u_2(t)$ נקבל:

$$y(t)=u(t)\dot{u}(t)=(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2)(\alpha_1\dot{u}_1+\alpha_2\dot{u}_2)\neq\alpha_1 u_1\dot{u}_1+\alpha_2 u_2\dot{u}_2=\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2$$

מסקנה: המערכת <u>אינה</u> ליניארית.

3) נתונה המערכת הבדידה $y(n)=u(n)^2$.

כבדוגמאות הקודמות נכתוב: $(i=1,2)$ $y_i(n)=u_i(n)^2$

ועבור $u(n)=\alpha_1 u_1(n)+\alpha_2 u_2(n)$ נקבל:

$$y(n)=u(n)^2=(\alpha_1 u_1(n)+\alpha_2 u_2(n))^2\neq\alpha_1 u_1(n)^2+\alpha_2 u_2(n)^2=\alpha_1 y_1(n)+\alpha_2 y_2(n)$$

מסקנה: המערכת <u>אינה</u> ליניארית.

4) נתונה מערכת באמצעות המשואה הדיפרנציאלית הבאה: $\dot{y}(t)+y(t)^{1/2}=u(t)$

נראה שזו אינה מערכת ליניארית:

עבור u_i נקבל $\dot{y}_i+y_i^{1/2}=u_i$ $\qquad i=1,2$

ועבור $u=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2$ נקבל

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \alpha_1(\dot{y}_1 + y_1^{1/2}) + \alpha_2(\dot{y}_2 + y_2^{1/2}) =$$

$$= (\alpha_1 \dot{y}_1 + \alpha_2 \dot{y}_2) + \alpha_1 y_1^{1/2} + \alpha_2 y_2^{1/2} \neq \dot{y} + y^{1/2} =$$

$$= (\alpha_1 \dot{y}_1 + \alpha_2 \dot{y}_2) + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)^{1/2}$$

1.3.6.3 סטציונריות (אי תלות בזמן)

כללית, מערכת עם תנאי התחלה 0 או מערכת במנוחה היא מערכת סטציונרית אם ורק אם צורת תגובתה, y, לכניסה u תלויה רק בצורת הכניסה ולא בזמן שהכניסה מופעלת.

הגדרה: מערכת עם תנאי התחלה 0 תקרא מערכת סטציונרית אם ורק אם עבור כל כניסה $u(t)$ (או $u(nT)$ עבור מערכות בדידות) וכל הזזות הזמן λ (או kT) תגובתה לכניסה המוזזת, $u(t-\lambda)$, ($u(nT-kT)$), היא כתגובתה לכניסה $u(t)$ ($u(nT)$) מוזזת בשעור λ (kT).

מתמטית: אם $y(t) = L(u(t),t)$ (1.4)

ואם $L(u(t-\lambda),t) = y(t-\lambda)$ (1.5)

אזי המערכת סטציונרית.

ועבור מערכת בדידה:

אם: $y(nT) = L(u(nT),nT)$ (1.6)

ואם $L(u(nT-kT),nT) = y(nT-kT)$ (1.7)

אזי המערכת סטציונרית.

1.3.4.4 דוגמאות

1) נתונה המערכת $y(t) = L(u, t) = t\dot{u}(t)$. האם היא סטציונרית?

נפעיל את תנאי (1.5):

$$L(u(t-\lambda), t) = t\,\dot{u}(t-\lambda) \neq y(t-\lambda) = (t-\lambda)\,\dot{u}(t-\lambda)$$

מסקנה: המערכת אינה סטציונרית (אך ליניארית כפי שהוכחנו בדוגמה קודמת).

2) נתונה המערכת $y(t) = L(u(t)) = u(t)\,\dot{u}(t)$,

$$L(u(t-\lambda)) = u(t-\lambda)\,\dot{u}(t-\lambda) = y(t-\lambda)$$

מסקנה: המערכת סטציונרית (אך אינה ליניארית כפי שהוכחנו קודם).

1.3.6.5 <u>הערות</u>:

1) תכונת הסטציונריות אינה קשורה לתכונת הליניאריות כפי שניתן לראות בדוגמאות הנ"ל.

מערכת עשויה להיות ליניארית ולא סטציונרית, ליניארית וסטציונרית ולהיפך.

2) מדוגמאות הליניאריות והסטציונריות ניתן להסיק כי מערכת הנתונה באמצעות משואה

דיפרנציאלית מהסוג :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j u^{(i)}(t) \qquad (1.8)$$

כאשר :

$$x^{(i)} \triangleq \frac{d^i x}{dt^i}$$

תהיה מערכת ליניארית, אם המקדמים a_i ו-b_j <u>אינם</u> כוללים את $y(t)$ ו/או $u(t)$ (בחזקה

כלשהיא שונה מ-0) ו/או את נגזרותיהם. מערכת (1.8) תהיה סטציונרית אם המקדמים a_i ו-b_j

אינם תלויים בזמן t במפורש.

1.3.6.6 <u>סיבתיות</u> (קוזאליות)

מערכת תקרא <u>סיבתית</u> אם יציאתה בכל זמן אינה תלויה בערכים עתידיים של הכניסה.

המערכת הבדידה: $y(n) = u(n+1)$ אינה סיבתית.גם המערכת הרציפה $y(t) = \dot{u}(t)$, למשל,

אינה סיבתית שכן גזירת $u(t)$ דורשת ידיעת ערכים עתידיים של $u(t+\Delta t) - u$.

למרות שמערכות פיזיקליות הינן סיבתיות קימת משפחה ענפה של מערכות שאינן סבתיות. למשל

מערכת בדידה שערכי כניסתה, $u(n)$, נרשמו עבור $0 \le n \le \infty$, ויציאתה מוגדרת כממוצע

המשוקלל הבא:

$$y(n) = \frac{1}{2k+1} \sum_{j=-k}^{k} u(n-j)$$

אינה סיבתית שכן $y(n)$ תלוי ב-$u(n+k)$. מערכות כאלו מופיעות לעיתים קרובות ב"עבוד נתונים". גם המערכת $y(t) = u(t^2)$ אינה סיבתית עבור כל $t > 1$. ניתן גם לקבל מערכות לא סיבתיות מתבור מערכות סיבתיות.

1.3.6.7 <u>סטטיות</u>

מערכת תקרא <u>סטטית</u> (או מערכת ללא זכרון) אם יציאתה בכל ערך של המשתנה הבלתי תלוי (הזמן למשל) תלויה אך ורק בכניסה באותו ערך של המשתנה הבלתי תלוי.

המערכת $y(t) = (cu(t) - u^2(t))^2$ היא מערכת סטטית. לעומת זאת המערכת

$$y(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau$$

הינה מערכת דינמית (לא סטטית) או מערכת עם זכרון.

1.4 <u>מודלים מתמטיים של מערכות פשוטות</u>

1.4.1 נתוח אנליטי או תיכון מוצלח של מערכת מתחיל בכתיבת מודל דינמי מתמטי של המערכת. כתיבת מודל דורשת הבנה טובה של התנהגות המערכת. לצורך כתיבת המודל אנו משתמשים בחוקים פיזיקליים ידועים כמו חוקי ניוטון, חוקי קירכהוף, חוקי השמור השונים וכו'.

קימות מערכות בהן ה"חוקים" הפיזיקליים אינם ידועים או ידועים באופן חלקי. מערכות כאלו הן למשל מערכות אקולוגיות, סוציאליות, כלכליות וכד'. כתיבת מודלים מתמטיים במקרים אלו מבוצעת, בין השאר, באמצעות שיטות זיהוי המבוססות על תוצאות ניסויים.

אין אנו לומדים כתיבת מודלים מפורטים בקורס זה. דבר זה נלמד בפרוט בקורסים השונים: פיזיקה, דינמיקה, תרמודינמיקה, זרימה, מעבר חום, חשמל, הידראוליקה, מנועים וכו'. נביא כאן דוגמאות פשוטות לקבלת מודלים של מערכות רציפות ובדידות פשוטות אשר נשתמש בהם בהמשך.

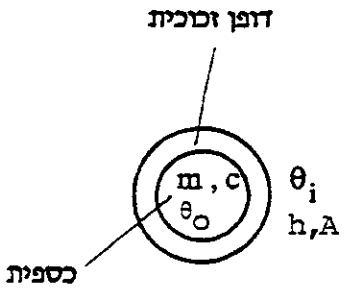
המדלים של מערכות רציפות שנטפל בהן יהיו מתוארים על ידי משוואות דפרנציאליות (או אינטגרליות - דיפרנציאליות) הקושרות בין הכניסות והיציאות של המערכת ועם משתנה בלתי תלוי יחיד כמו הזמן למשל. מערכות כאלו נקראות מערכות עם פרמטרים מרוכזים (Lumped parameter systems) להבדיל ממערכות עם פרמטרים מפולגים (distributed parameter system), להן שניים או יותר משתנים בלתי תלויים ומתוארות על ידי משואות דיפרנציאליות חלקיות.

המערכות הבדידות כאן תתוארנה על ידי משואות הפרשים עם משתנה בלתי תלוי אחד.

1.4.2 מערכות רציפות

1.4.2.1 מערכות מסדר I

א. מערכת תרמית - מדחום כספית



ציור 1.9

בציור 1.9 מתואר סכמטית מדחום כספית :

m - מסת הכספית (Kg m)

c - חום סגולי כספית ($Kcal/(Kgm\cdot^oC)$)

θ_i - טמפרטורה נמדדת (^oC)

θ_o - טמפרטורה הכספית - הזרית המדחום

h - מקדם מעבר החום ($Kcal/(m^2\cdot sec\cdot^oC)$)

A - שטח מעבר החום (m^2)

בהזנחת קבול החם של הזכוכית והתנגדות מעבר החום של הכספית נקבל:

$$hA(\theta_i(t) - \theta_0(t)) = mc\dot{\theta}_0(t) \qquad (1.9)$$

(1.9) מבוססת על מאזן חום:

ספיקת חום נכנסת - ספיקת חום יוצאת = קצב הצטברות חום.

את (1.9) נביא לצורה:

$$\tau\dot{\theta}_0 + \theta_0 = \theta_i \qquad (1.10)$$

כאשר $\tau = mc/hA$. ל-τ מימדים של זמן והוא נקרא <u>קבוע הזמן</u> של המערכת.

אם נשתמש באופרטור D לציון גזירה לפי הזמן $(Dy = \frac{dy}{dt} \;;\quad D^2y = \frac{d^2y}{dt^2})$

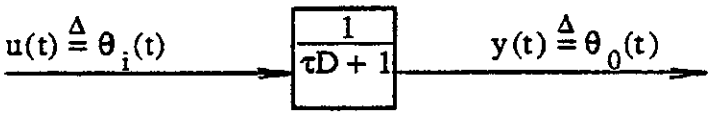
נוכל לכתוב את (1.10) בצורה:

$$(\tau D + 1)\theta_0 = \theta_i$$

או:

$$\theta_0 = \frac{1}{(\tau D + 1)}\,\theta_i \qquad (1.11)$$

ציור הקשר (1.11) במונחים של ציור 1.3 יתן:



ציור 1.10

כך שהכניסה למערכת מוגדרת כ-θ_i ויציאתה כ-θ_0.

ב. <u>גובה נוזל במיכל</u>

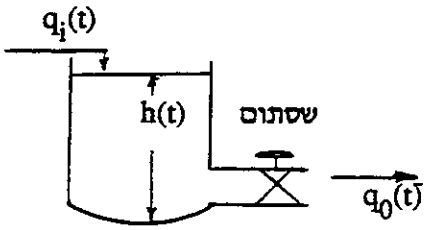
q_i - ספיקה נפחית נכנסת (m^3/hr)

q_0 - ספיקה נפחית עוזבת (m^3/hr)

h - גובה הנוזל במיכל (m)

A - שטח חתך המיכל (m^2)

ρ - צפיפות הנוזל (kgm/m^3)



ציור 1.11

מאזן מסה: מסה נכנסת (ליחידת זמן) - מסה עוזבת (ליחידת זמן) = קצב הצטברות מסה במיכל . לכן אם שטח המיכל קבוע וצפיפות הנוזל קבועה נקבל:

$$\rho(q_i - q_0) = \frac{d}{dt}(\rho A h) \qquad (1.12)$$

או:

$$q_i - q_0 = A\dot{h} \qquad (1.13)$$

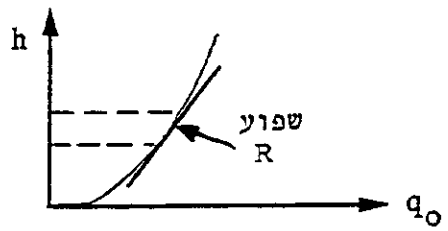
הספיקה q_0 דרך השסתום נתונה על ידי:

$$q_0 = c\sqrt{\Delta h} \qquad (1.14)$$

(c - קבוע , Δh - הפרש העומדים בשני צידי השסתום). היות ובדוגמא זו הנוזל דרך השסתום זורם לאטמוספירה נוכל לכתוב $q_0 = c\sqrt{h}$. נציב ב-(1.13) ונקבל:

$$A\dot{h} + c\sqrt{h} = q_i \qquad (1.15)$$

משוואה (1.15) הינה משוואה לא-ליניארית. בתנאים מסוימים ניתן להפכה למשוואה ליניארית. בציור 1.12 נתון הקשר (1.14). אם נניח כי שנויי גובה הנוזל במיכל הם בתחום מוגבל (ראה ציור) נוכל לקרב הפרבולה באמצעות ישר בעל שפוע R. בתנאים אלו נקבל:



ציור 1.12

$$q_0 = \frac{h}{R}$$

(R נקרא התנגדות השסתום לזרימה).

ומשואה (1.15) תתקבל כ-

$$A\dot{h} + \frac{h}{R} = q_i$$

או:

$$(RA)\dot{h} + h = Rq_i \qquad (1.16)$$

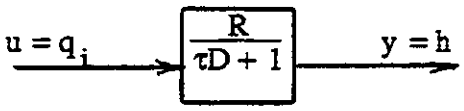
ל-RA מימדים של זמן ולכן נסמן $\tau = RA$ ועל ידי שמוש באופרטור D נקבל:

$$(\tau D + 1)\ h = Rq_i \qquad (1.16)'$$

או

$$h = \frac{R}{\tau D + 1} q_i \qquad (1.17)$$

הקשר כניסה יציאה של מערכת הנוזל במיכל נתון בציור 1.13.



ציור 1.13

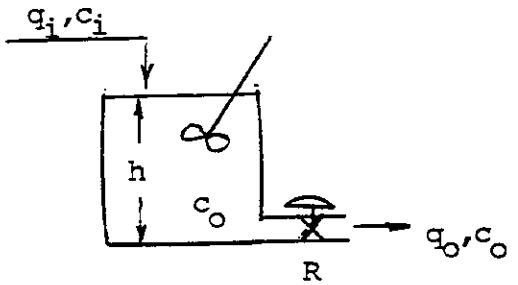
בהנחת הליניאריות של השסתום קבלנו עבור המערכת הנ"ל משואה דפרנציאלית מסדר I הדומה לזו שהתקבלה עבור מדחום הכספית.

הערה: במידה ושטח חתך המיכל אינו קבוע ותלוי בגובה, דהיינו $A = f(h)$, תוחלף משואה (1.12) על ידי:

$$q_i - q_0 = \frac{d}{dt}\int_0^h f(h)dh = f(h)\dot{h} \qquad (1.18)$$

(1.18) הינה משואה לא-ליניארית.

ג. <u>רכוז במיכל בחוש היטב</u>



ציור 1.14

נוזל המכיל חומר מסוים בריכוז $c_i(t)$ נכנס למיכל ויוצא ממנו ברכוז אחר $c_o(t)$. אנו מניחים שהנוזל במיכל בחוש היטב כך שרכוז החומר במיכל הוא $c_o(t)$. (אם לא ניתן להניח שרכוז החומר במיכל אחיד אלא תלוי במקום נקבל משואה דפרנציאלית חלקית שכן c במיכל יהיה תלוי בזמן ובמקום).

$q_i(q_o)$ - ספיקה נכנסת (יוצאת) (m^3/hr)

c_i - רכוז החומר בכניסה (Kgm/m^3)

c_o - רכוז החומר ביציאה (ובמיכל)

h - גובה הנוזל במיכל; A - שטח חתך המיכל; $V = Ah$ - נפח הנוזל במיכל.

אם נכתוב מאזן מסה עבור החומר נקבל:

$$c_i q_i - c_o q_o = \frac{d}{dt}(V \cdot c_o) \qquad (1.19)$$

נניח כי $q_o = q_i = q = \text{constant}$ ואז V קבוע. (1.19) תתן:

$$c_i - c_o = \frac{V}{q}\dot{c}_o$$

או

$$\tau\dot{c}_o + c_o = c_i \qquad (1.20)$$

כאשר $\tau = V/q$ - קבוע הזמן.

(1.20) היא משואה דפרנציאלית מסדר I בדיוק במתכונת של (1.10) ולכן ציור 1.10 תופס גם כאן אלא ש- $u \overset{\Delta}{=} c_i$ ו- $y \overset{\Delta}{=} c_o$.

הערה: אם $q_o \neq q_i$ אזי h אינו קבוע. משואה (1.19) בהנחת ליניאריות השסתום תתן

$$c_i(t)\, q(t) - c_o(t)\frac{h(t)}{R} = A\dot{h}(t)\, c_o(t) + Ah(t)\dot{c}_o(t) \qquad (1.21)$$

משואה (1.21) הינה משואה לא-ליניארית אשר יחד עם משואת מאזן החומר הכולל:

$$q_i - \frac{h}{R} = A\dot{h} \qquad (1.22)$$

מתארת את המערכת במקרה הכללי יותר.

במקרה זה נוכל להציג המערכת כמערכת עם שתי כניסות ושתי יציאות כמתואר בציור 1.15.

ציור 1.15

כאשר המודל המתמטי של המערכת מורכב מ-(1.21) ו-(1.22).

ד. <u>מעגל חשמלי (נגד - קבל).</u>

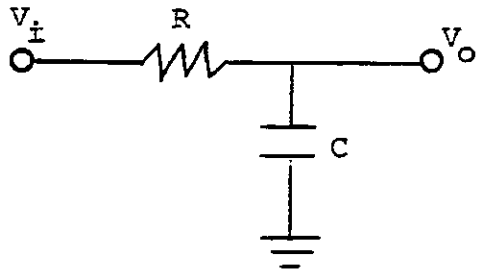
R - התנגדות (Ohm)

C - קבול (Farad)

V - מתח (Volt)

i - זרם (Ampere)

q - מטען (Conlomb)



ציור 1.16

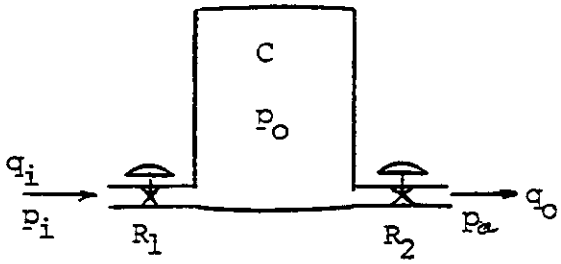
היות והמתח על פני הקבל נתון על ידי $V_o = q/C$ (או $\dot{q} = C\dot{V}_o$) ו- $i = \dot{q}$ נקבל מחוק קירקהוף:

$$RC\dot{V}_o + V_o = V_i \qquad (1.23)$$

ואם נסמן $\tau = RC$ תהיה (1.23) בדיוק במתכונת (1.10) או (1.20) ותתואר סכמטית על ידי ציור (1.10)

כאשר $u \triangleq V_i$ ו- $y \triangleq V_o$.

ה. <u>מערכת לחץ פניאומטית</u>



ציור 1.17.

אויר בלחץ p_i עובר דרך שסתום בעל התנגדות R_1 לתוך מיכל. למיכל קבול פניאומטי C. לחץ האויר במיכל היו p_o. האויר במיכל משתחרר לאטמוספירה דרך שסתום בעל התנגדות R_2.

C - קבול פניאומטי ($m^3/(Kgf/m^2)$)

R - התנגדות ($(Kgf/m^2)/(m^3/sec.)$)

p - לחץ (Kgf/m^2) (p_a - לחץ אטמוספרי)

q - ספיקה ($m^3/sec.$)

הנחות: נניח C קבוע (C תלוי בלחץ. לכן נלקח בדרך כלל ערכו הממוצע בתחום לחצי העבודה). כמו כן נניח R קבוע. הנחה זו נכונה כל עוד הזרימה למינרית. בתנאים אלו:

$$q = \frac{p_1 - p_2}{R} \qquad (1.24)$$

כאשר p_1-p_2 הפרש הלחצים על פני השסתום.

היות והלחצים נמדדים ביחס ללחץ האטמוספרי יהיה $p_a = 0$. מאזן ספיקות יתן:

$$C\dot{p}_o = q_i - q_o = \frac{p_i - p_o}{R_1} - \frac{p_o}{R_2} \qquad (1.25)$$

או

$$\tau\dot{p}_o + p_o = Kp_i \qquad (1.26)$$

כאשר :

$$\tau = R_1R_2C/(R_1 + R_2)$$

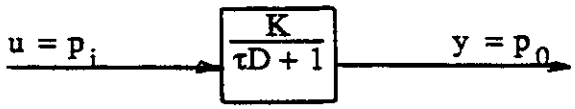
ו-

$$K = R_2/(R_1 + R_2) \qquad (1.27)$$

ובאמצעות האופרטור D נקבל:

$$p_o = \frac{K}{\tau D + 1} p_i \qquad (1.28)$$

משואות (1.26) ו-(1.28) הן משואות מסדר I במתכונת זהה למערכות הקודמות. הקשר כניסה יציאה ניתן בציור 1.18



ציור 1.18

הערה: כאשר הזרימות הן בתחום הטורבולנטי הקשר בין הספיקה דרך השסתום ומפל הלחצים על פניו נתון על ידי:

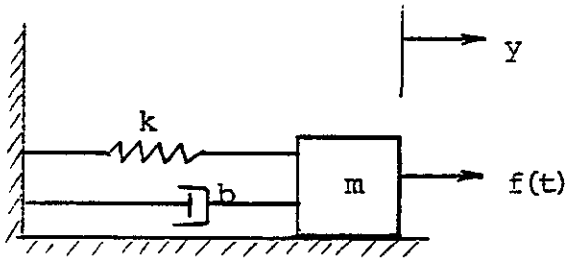
$$q = c\sqrt{\Delta P} \qquad (1.29)$$

בתנאים אלו נקבל מערכת לא-ליניארית. במדה ותחום שנוי הלחצים קטן יחסית ניתן לקבל קשר ליניארי על ידי קרוב (1.29) בצורה דומה לזו שבסעיף ב'.

1.4.2.2 <u>מערכות מסדר II</u>

ו. <u>מערכת מכנית קוית</u>

במערכת המכנית הנתונה בציור 1.19 מסה קפיץ ומרסן. בהעדר חכוך בין המסה והמשטח האפקי ותתקבל המשואה הדיפרנציאלית הבאה מהחוק השני של ניוטון:



ציור 1.19:

$$m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = f(t) \qquad (1.30)$$

כאשר:

m - מסה (Kgm)

b - קבוע המרסן (מקדם חכוך ויסקוזי) ((N/(m/sec.))

k - קבוע הקפיץ (N/m)

f - כח (N)

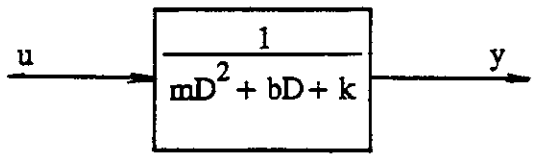
y - המיקום הרגעי של המסה (m)

משואה (1.30) הינה משואה דיפרנציאלית - מסדר שני.

על ידי שמוש באופרטור D והגדרת הכח f ككניסה $(u \overset{\Delta}{=} f)$ נקבל:

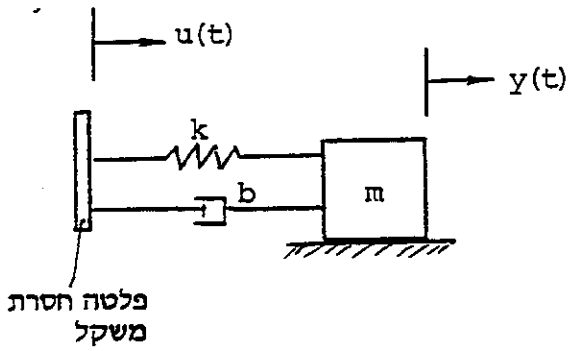
$$y = \frac{1}{mD^2 + bD + k} u \qquad (1.31)$$

ותאור סכמטי של (1.31) נתון בציור 1.20.



ציור 1.20:

הערה: אם הכניסה u למערכת המכנית הנ"ל תוגדר כמיקום הרגעי של הפלטה חסרת המשקל (ראה ציור 1.21) תהיה הדינמיקה של המערכת נתונה על ידי:



ציור 1.21

$$m\ddot{y} + b(\dot{y} - \dot{u}) + k(y - u) = 0$$

או:

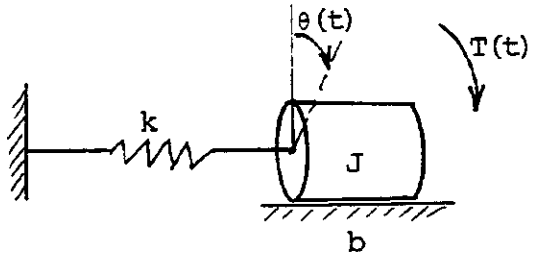
$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = b\dot{u} + ku \qquad (1.32)$$

ובאמצעות האופרטור D נקבל:

$$y = \frac{bD + k}{mD^2 + bD + k} u \qquad (1.32)$$

ז. <u>מערכת מכנית סבובית</u>

בציור 1.22 נתונה מערכת מכנית סבובית המורכבת מגוף וקפיץ פתול. על הגוף פועל חכך ויסקוזי המפעיל מומנט מנוגד לכוון הסיבוב ופרופורציונלי (דרך הקבוע b) למהירות הזוויתית ($\dot{\theta}$) של הגוף.



ציור 1.22:

מאזן מומנטים על הגוף:

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta = T(t) \qquad (1.33)$$

כאשר:

J - מומנט האינרציה של הגוף ($Kgm \cdot m^2$)

b - מקדם החכך הויסקוזי (או קבוע המרסן) ($N \cdot m/(rad/sec.)$)

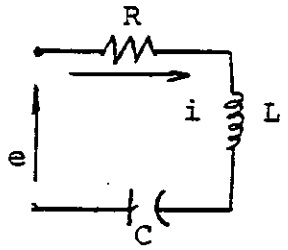
k - קבוע קפיץ הפתול ($N \cdot m/rad$)

θ - המקום הזוויתי הרגעי של הגוף (rad)

T - המומנט החיצוני המופעל על הגוף ($N \cdot m$)

משואה (1.33) אנלוגית לחלוטין למשואה (1.30). אם נגדיר הכניסה: $u \triangleq T$ והיציאה: $y \triangleq \theta$ יתאר ציור (1.20) גם את המערכת הסבובית (כאשר נחליף m ב-J).

ת. <u>מערכת חשמלית (נגד - קבל - סליל)</u>



ציור 1.23

ציור 1.23 מתאר מערכת חשמלית עם מקור מתח $e(t)$

מחוק קירכהוף נקבל:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt = e \qquad (1.34)$$

אם נגדיר $\dot{q} = i$ ונציב ב-(1.34)

נקבל:

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = e(t) \qquad (1.35)$$

כאשר:

R - התנגדות (Ohm)

L - השראות (Henry)

C - קבול (Farad)

e - מתח המקור (Volt)

i - זרם (Ampere)

q - מטען (Coulomb)

משואה (1.35) הינה משואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר II. באמצעות האופרטור D נכתוב את (1.35) בצורה:

$$q = \frac{1}{LD^2 + RD + \frac{1}{C}}\,e \qquad (1.36)$$

אם נגדיר $y \triangleq q$ ו- $u \triangleq e$ ונחליף את m,b,k ב-L,R,1/C בהתאמה, יתאר ציור 1.20 גם את המערכת החשמלית הנ"ל.

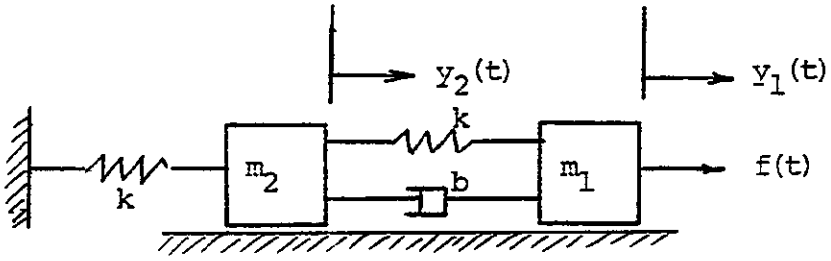
הערה: אם היציאה y מוגדרת כזרם i נוכל למצוא את המשוואה הדיפרנציאלית המתאימה ישירות מתוך (1.36) אם נזכור כי $i = Dq$. אם נציב קשר זה ב-(1.36) נקבל:

$$y = i = Dq = \frac{D}{LD^2 + RD + 1/C}\,u \qquad (1.36)'$$

1.4.2.3 <u>מערכות מסדר גבוה</u>

המערכות הפשוטות שהיצגנו בסעיפים הקודמים היו מסדר ראשון ושני. סדר המערכת נקבע לפי סדר המשוואה הדיפרנציאלית המתארת את המערכת.

מערכות מורכבות יותר מאלו שהיצגנו עד כה ותבורן של מערכות פשוטות מביאים למודלים מתמטיים עם משוואות דיפרנציאליות מסדר גבוה יותר. נדגים זאת באמצעות מערכת מכנית קוית עם שתי מסות כמוראה בציור 1.24.



ציור 1.24

הפעלת החוק השני של ניוטון על כל אחת מהמסות מביאה ל:

$$m_1\ddot{y}_1 + b(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k(y_1 - y_2) = f$$

$$m_2\ddot{y}_2 + b(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k(y_2 - y_1) + ky_2 = 0 \qquad (1.37)$$

כאשר y_1 ו-y_2 מציינים את המיקום הרגעי של m_1 ו-m_2 בהתאמה. באמצעות האופרטור D נקבל:

$$a)\quad (m_1D^2 + bD + k)y_1 - (bD + k)y_2 = f$$

$$b)\quad -(bD + k)y_1 + (m_2D^2 + bD + 2k)y_2 = 0 \qquad (1.38)$$

אם מגדירים את היציאה $y \overset{\Delta}{=} y_1$ ואת הכניסה $u \overset{\Delta}{=} f$ נרצה לקבל משוואה דיפרנציאלית אחת הקושרת בין y ל-u. זאת נוכל להשיג על ידי חלוץ y_2 מ-(1.38b) והצבתו ב-(1.38a). פעולה זו תביא לקשר כניסה-יציאה הבא:

$$y = \frac{m_2D^2 + bD + 2k}{m_1m_2D^4 + (m_1+m_2)bD^3 + (2m_1+m_2)kD^2 + kbD + k^2}\,u \qquad (1.39)$$

או:

$$m_1m_2\dddot{y} + (m_1+m_2)b\ddot{y} + (2m_1+m_2)k\ddot{y} + kb\dot{y} + k^2y = m_2\ddot{u} + b\dot{u} + 2ku \qquad (1.40)$$

משוואות (1.39) או (1.40) מתארות מערכת מסדר רביעי.

1.4.2.4 <u>סיכום</u>

1. מודל מתמטי של מערכת רציפה ליניארית עם כניסה אחת u ויציאה אחת y נתון כללית על ידי המשוואה הדיפרנציאלית:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u \qquad (1.41)$$

כאשר בדרך כלל $m \le n$ וברב המקרים $m<n$.

2. במערכות מסדר ראשון $n=1$ ו-(1.41) היא מהצורה:

$$a_1\dot{y} + a_0y = b_1\dot{u} + b_0u \qquad (1.42)$$

במרבית הדוגמאות קבלנו כי $b_1 = 0$. במקרים אלו ניתן לכתוב את (1.42) בצורה (במידה ו-$a_0 \neq 0$):

$$\frac{a_1}{a_0}\dot{y} + y = \frac{b_0}{a_0}u \qquad (1.43)$$

אם נסמן $a_1/a_0 = \tau$ ו-$b_0/a_0 = k$ מתקבל המודל המתמטי המתאים לכל הדוגמאות מסדר I אשר טפלנו בהן בפרק זה. במקרים אלו τ הוא קבוע הזמן של המערכת ו-k ההגבר הסטטי (מונח זה יובהר בהמשך).

3. במערכות מסדר שני $n = 2$ ו-(1.41) תתן:

$$a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_2\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_0 u \qquad (1.44)$$

משואות (1.30), (1.33) ו-(1.35) הן במתכונת הנ"ל כאשר $b_2 = b_1 = 0$ משוואה (1.32) מתאימה ל-(1.44) עם $b_2 = 0$ ו-(1.36) עם $b_2 = b_0 = 0$.

14.3 <u>מערכות בדידות</u>

14.3.1 מערכות בדידות ליניאריות אשר נטפל בהן בקורס זה תתוארנה על ידי משואות הפרשים במשתנה בלתי תלוי אחד, למשל הזמן הבדיד t_k או המקום הסדורי k. אם $u(t_k)$ ו-$y(t_k)$ הם הכניסה הבדידה והיציאה הבדידה ברגע t_k תהיה מערכת SISO כללית בדידה וליניארית נתונה על ידי משואת ההפרשים:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(t_{k+i}) = \sum_{i=0}^{m} b_i u(t_{k+i}) \qquad (1.45a)$$

או:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k+i) = \sum_{i=0}^{m} b_i u(k+i) \qquad (1.45b)$$

או:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y_{k+i} = \sum_{i=0}^{m} b_i u_{k+i} \qquad (1.45c)$$

שלוש המשואות הנ"ל נבדלות רק בצורת הכתיבה.

נעזר באופרטור ההזזה z המוגדר לפי:

$$z^{n}y_i = y_{i+n} \qquad (1.46)$$

או:

$$z^{-n}y_i = y_{i-n} \qquad (1.47)$$

נביא להלן מספר דוגמאות לקבלת מודלים מתמטיים של מערכות בדידות פשוטות.

1.4.3.2 <u>דוגמא א'</u> - באוניברסיטה מסוימת נהוג לקבוע לסטודנט ציון מיצג בסיום כל סמסטר אשר הינו ממוצע משוקלל של הגורמים הבאים:

א. ממוצע ציוניו בסמסטר הנוכחי - במשקל 60%.

ב. ציונו המיצג בסמסטר הקודם - במשקל 25%.

ג. ציונו המיצג בסמסטר שלפני הקודם - במשקל 15%.

נסמן: y_k - ציון מיצג בסוף הסמסטר ה-k (יציאה)

u_k - ממוצע הציונים בסמסטר ה-k (כניסה).

נקבל לכן:

$$y_k = 0.6u_k + 0.25y_{k-1} + 0.15y_{k-2}$$

או:

$$y_k - 0.25y_{k-1} - 0.15y_{k-2} = 0.6u_k \qquad (1.48)$$

משואה (1.48) הינה משואת הפרשים המתארת את ה"דינמיקה" של הציון המיצג כתלות בממוצע ציוניו.

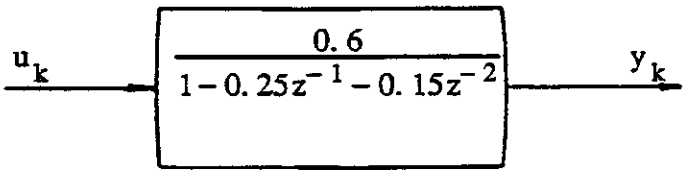
באמצעות האופרטור z נכתוב את (1.48) בצורה:

$$y_k(1 - 0.25z^{-1} - 0.15z^{-2}) = 0.6\, u_k$$

או:

$$y_k = \frac{0.6}{1-0.25z^{-1}-0.15z^{-2}}\,u_k = \frac{0.6z^2}{z^2-0.25z-0.15}\,u_k \qquad (1.49)$$

הקשר כניסה-יציאה יתואר סכמטית כבציור 1.25.



ציור 1.25:

משוואה (1.48) היא משוואת הפרשים מסדר שני.

1.4.3.3 <u>דוגמא ב' - בעית מלאי במחסן</u>

הזמנות ומשלוחים מתקבלים פעם בשבוע. חולף שבוע מיום הזמנת חלקים ועד קבלתם במחסן. המשלוח מהמחסן בשבוע ה-k פרופורציונלי למלאי הקיים באותו שבוע ומקדם הפרופורציה הוא a .

נסמן:

y(k) - המלאי במחסן בשבוע ה-k לפני בצוע כל פעולה אחרת (לפני כניסת הזמנות והוצאת משלוחים).

u(k) - הזמנת המחסן בשבוע ה-k .

דינמיקת המלאי תהיה נתונה לכן על ידי:

$$y(k) = y(k-1) + u(k-2) - a\,y(k) \qquad (1.50)$$

או:

$$(1+a)\,y(k) - y(k-1) = u(k-2) \qquad (1.51)$$

ובעזרת האופרטור z נקבל:

$$y(k) = \frac{z^{-2}}{1+a-z^{-1}}\,u(k) = \frac{1}{(1+a)z^2 - z}\,u(k) \qquad (1.52)$$

משואה (1.51) הינה משואת הפרשים מסדר שני ($k-(k-2) = 2$).

1.4.3.4 <u>דוגמא ב'</u> - אדם חוסך בשתי תכניות חסכון. תוכנית א' מקנה ריבית חודשית α ($0 < \alpha < 1$) ותכנית ב' מעניקה ריבית חודשית β ($0 < \beta < 1$) - 60% מהפקדותיו בחודש מסוים מכניס החוסך לתכנית א' והשאר לתכנית ב'. הריביות מחושבות על בסיס המאזן בתחילת כל חודש.

נסמן:

u_i - סך ההפקדות בחודש ה-i .

y_i - מאזן כללי של חסכונותיו בתחילת החודש ה-i .

x_i - מאזן חשבון החסכון בתכנית א' בתחילת החודש ה-i .

מאזן חסכונו בתכנית א' בתחילת החודש ה-i+1 , יהיה נתון על ידי:

$$x_{i+1} = (1+\alpha)x_i + 0.6u_i \tag{1.53}$$

ומאזן חסכונו בתכנית-ב' בתחילת החודש ה-i+1, $y_{i+1}-x_{i+1}$, יהיה:

$$y_{i+1} - x_{i+1} = (1+\beta)\,(y_i - x_i) + 0.4\,u_i \tag{1.54}$$

אם מטרתנו לקבל קשר ישיר בין u_i ל-y_i (ללא משתנה העזר x_i) נבצע הפעולות הבאות:

נחבר (1.53) ו-(1.54):

$$y_{i+1} = (1+\beta)y_i + (\alpha-\beta)x_i + u_i \tag{1.55}$$

בעזרת האופרטור z נחלץ מ-(1.53) את x_i :

$$zx_i = (1+\alpha)x_i + 0.6u_i$$

$$x_i = \frac{0.6}{z-1-\alpha}\,u_i \tag{1.56}$$

נציב (1.56) ב-(1.55):

$$zy_i = (1+\beta)y_i + \left((\alpha-\beta)\,\frac{0.6}{z-1-\alpha} + 1\right)u_i$$

לאחר בצוע מכנה משותף של שני האגפים נקבל:

$$y_{i+2} - (2+\alpha+\beta)y_{i+1} + (1+\beta)(1+\alpha)\,y_i = u_{i-1} - (1 + 0.4\alpha + 0.6\beta)\,u_i \qquad (1.57)$$

(1.57) הינה משואת ההפרשים המבוקשת. זוהי משואת הפרשים מסדר שני.

1.4.3.5 <u>דונמא ד'</u> - קרוב משואה דפרנציאלית באמצעות משואת הפרשים. לצורך פתרון נומרי של משוואות דיפרנציאליות מקרבים אותן באמצעות משואות הפרשים. נדגים פעולה זו באמצעות משוואה דיפרנציאלית מסדר שני:

$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \qquad (1.58)$$

נבחר בקרוב פשוט:

$$\dot{y}(t) \equiv \frac{y_k - y_{k-1}}{T} \qquad (1.59)$$

כאשר:

y_k הוא ערך $y(t)$ ברגע $t = t_k$.

y_{k-1} הוא ערך $y(t)$ ברגע t_{k-1}.

ו- $T = t_k - t_{k-1}$.

את (1.59) ניתן להציג באמצעות האופרטור z:

$$\dot{y}(t) \equiv \frac{1 - z^{-1}}{T}\, y_k$$

את $\ddot{y}(t)$ נוכל לכן לקרב על ידי:

$$\ddot{y}(t) \equiv \left(\frac{1 - z^{-1}}{T}\right)^2 y_k = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{T^2}\, y_k = \frac{1}{T^2} y_k - \frac{2}{T^2} y_{k-1} + \frac{1}{T^2} y_{k-2}$$

(1.60)

אם נציב (1.59) ו-(1.60) ב-(1.58) נקבל:

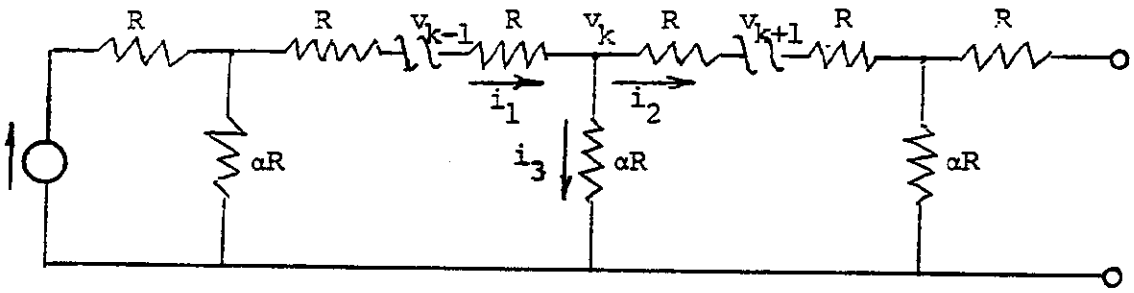
$$\frac{a_2}{T^2}(y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}) + \frac{a_1}{T}(y_k - y_{k-1}) + a_0 y_k = b_0 u_k$$

ולאחר כינוס נקבל:

$$(\frac{a_2}{T^2} + \frac{a_1}{T} + a_0)\, y_k - (\frac{2a_2}{T^2} + \frac{a_1}{T}) y_{k-1} + \frac{a_2}{T^2} y_{k-2} = b_0 u_k \qquad (1.61)$$

(1.61) היא משואת הפרשים מסדר שני המקרבת את (1.58) . איכות הקרוב תלויה במשואה הדיפרנציאלית ואת T יש לבחור קטן מספיק.

14.3.6 <u>דוגמא ה'</u> - רשת חשמלית עם מבנה חוזר.



<u>ציור 1.26</u>

בציור מתוארת רשת חשמלית עם מבנה חוזר. הפוטנציאלים v_i בכל צומת הם פונקציה של אינדקס המקום k . חוק קירקהוף לגבי הצומת ה-k $(i_1 = i_2 + i_3)$ יתן:

$$\frac{v_{k-1} - v_k}{R} = \frac{v_k - v_{k+1}}{R} + \frac{v_k}{\alpha R}$$

או:

$$\alpha v_{k+1} - (2\alpha + 1) v_k + \alpha v_{k-1} = 0 \qquad (1.62)$$

יש לשים לב לעובדה שהמשתנה הבלתי תלוי במקרה זה מציין מקום ולא זמן. משוואה (1.62) הינה משואת הפרשים מסדר שני המקשרת בין פוטנציאלי הצמתות ברשת.

פרק 2 : מטריצות ומרחבים וקטוריים ליניאריים (רענון)

בפרק זה נסקור בקצרה מושגים וכלים מתורת המרחבים הוקטוריים הליניאריים, מטריצות וטרנספורמציות. ההנחה היא שהקורא כבר למד נושאים אלו והמטרה כאן היא רענון תוך הדגשה של המושגים הרלונטיים לעניינו ואשר נשתמש בהם בהמשך. סקירה קצרה זו אינה יכולה לשמש כתחליף ללמוד יסודי של הנושא.

2.1 דטרמיננטים ומטריצות

תהיה נתונה המטריצה $A \in C^{n \times m}$:

$$A_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1m} \\ \\ a_{n1} \cdots a_{nm} \end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

נסמן דטרמיננט של מטריצה רבועית $A_{n\times n}$ על ידי $|A|$ או $\det(A)$.

2.1.1 מינור - דטרמיננט של תת-מטריצה רבועית של A . אם מימד התת מטריצה הוא $k \times k$ נאמר שזהו מינור מסדר k , של A.

2.1.2 מינור ראשי - הוא מינור המתקבל מתת-מטריצה רבועית שאלכסונה הוא חלק מאלכסון המטריצה הריבועית A.

2.1.3 אם נתונה $A_{n\times n}$ אזי המינורים ממימד $(n-1)\times(n-1)$ המתקבלים מהוצאת השורה ה-i והעמודה ה-j ב-A יסומנו $|M_{ij}|$.

2.1.4 משלים אלגברי - c_{ij} של אלמנט a_{ij} ב-$A_{n\times n}$ מוגדר על ידי:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}| \qquad (2.2)$$

את מטריצת המשלימים נסמן על ידי $\{C_{ij}\}$.

2.1.5 פתוח לפלס של דטרמיננט

ניתן לחשב את $|A|$ על ידי פתוח לפלס לפי שורות או עמודות.

פתוח לפלס נתון על ידי:

לפי שורות:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij} \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.3}$$

לפי עמודות:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ij} \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.4}$$

2.1.6 <u>דוגמא</u>: נתונה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

נפתח $|A|$ לפי השורה הראשונה:

$$|M_{11}| = 4 \quad ; \quad c_{11} = 4$$

$$|M_{12}| = 2 \quad ; \quad c_{12} = -2 \qquad |A| = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}c_{1j} = -2$$

$$|M_{13}| = -4 \quad ; \quad c_{13} = -4$$

2.1.7 <u>הערה</u>: אם את a_{ij} שב-(2.3) נחליף ב-a_{kj} $(k \neq i)$ נקבל

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_{ij} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots n \; ; \; k \neq i \tag{2.5}$$

2.1.8 <u>מטריצת Adjoint</u> - היא מטריצת המשלימים המוחלפת:

$$Adj(A) = (C_{ji}) = (C_{ij})^T \tag{2.6}$$

2.1.9 <u>דוגמא</u>: נתונה A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(C_{ij}) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Adj}(A) = (C_{ij})^T = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 6 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.1.10 על ידי שמוש ב-(2.6) ובפתוח לפלס קל להראות עבור $A_{n\times n}$ את הקשר:

$$A \cdot \mathrm{Adj}(A) = |A| I_n \qquad (2.7)$$

2.1.11 <u>המטריצה ההפכית:</u> A^{-1}.

על ידי חלוקת (2.7) ב-$|A|$ נקבל:

$$A \cdot \frac{\mathrm{Adj}(A)}{|A|} = I_n$$

ומכאן:

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(A)}{|A|} \qquad (2.8)$$

2.1.12 <u>הערה:</u> אם

$$C = A\,B \qquad (2.9)$$

אזי

$$C^{-1} = B^{-1} A^{-1} \qquad (2.10)$$

(כפול (2.9) ב-$B^{-1} A^{-1}$)

2.2 <u>מרחב וקטורי ליניארי</u>

2.2.1 <u>הגדרה:</u> מרחב וקטורי ליניארי X , מעל שדה F (שדה - אוסף אלמנטים הנקראים סקלרים עם שתי פעולות: חבור וכפל) מורכב מסט של וקטורים (אלמנטי המרחב), שדה F ושתי פעולות: חבור וקטורי ומכפלה בסקלר.

שתי הפעולות הנ"ל מוגדרות כך שמקימות את התנאים הבאים:

1. אם $x_1 \in X$ ו-$x_2 \in X$ אזי גם $x_1 + x_2 \in X$.
2. (חבור קומוטטיבי) אם $x_1 \in X$ ו-$x_2 \in X$ אזי $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$.

3. (חבור אסוציאטיבי) אם $x_1 \in X$ ו-$x_2 \in X$ ו-$x_3 \in X$ אזי:

$$x_1 + (x_2+x_3) = (x_1+x_2) + x_3$$

4. X מכיל וקטור 0 כך ש-$x + 0 = x$ עבור כל $x \in X$.

5. לכל $x \in X$ קיים $\bar{x} \in X$ כך ש-$\bar{x} + x = 0$.

6. לכל $\alpha \in F$ ו-$x \in X$ קיים $\alpha x \in X$.

7. לכל $\alpha , \beta \in F$ ולכל $x \in X$ קיים $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

8. $\alpha(x_1+x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$

9. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

10. לכל $x \in X$ קיים $1x = x$ כאשר 1 הוא האלמנט 1 ב- F.

סימון: וקטור x השייך למרחב X מעל השדה F יסומן: $x \in (X,F)$.

2.2.2 <u>תלות ליניארית</u> - אוסף הוקטורים $x^1,x^2,\ldots,x^n$ במרחב ליניארי מעל שדה F נקרא **<u>תלוי ליניארית</u>** אם קימים סקלרים $\alpha_1, \alpha_2,\ldots\alpha_n$ ב-F, לא כולם 0, כך ש:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i = 0 \qquad (2.11)$$

אם סט ה-α היחידי המקים הקשר (2.11) הוא $\alpha_i = 0 \quad i = 1,\ldots,n$ אזי הסט $x^i \ (i = 1,2,\ldots,n)$ **<u>בלתי תלוי ליניארית</u>**.

2.2.3 <u>הערות</u>:

1. תלות ליניארית תלויה לא רק בסט הוקטורים אלא גם בשדה.

2. אם $x^i \ (i = 1,2,\ldots,n)$ תלויים ליניארית אזי לפחות אחד מהם ניתן לבטא כקומבינציה ליניארית של האחרים.

2.2.4 <u>מימד המרחב</u>: המספר המקסימלי של וקטורים בלתי תלויים במרחב.

הערה: קימים מרחבים ממימד אין-סופי. דהיינו אי אפשר למצוא α_i כאלו, לא כולם 0 כך ש-$\Sigma\alpha_i x^i = 0$ אלא אם i הולך מ-1 ל-∞. בקורס זה נעסוק במרחבים בעלי מימד סופי בלבד.

2.2.5 <u>בסיס</u>: סט של וקטורים בלתי תלויים ליניארית יקרא בסיס ב-X אם כל וקטור ב-X ניתן לבטא כקומבינציה ליניארית יחידה של וקטורים אלו.

מסקנה: במרחב וקטורי n מימדי כל סט של n וקטורים בלתי תלויים יכול לשמש כבסיס.

2.2.6 <u>נורם</u>

נורם של וקטור x אשר יסומן להלן על ידי $\|x\|$ הוא הכללה של מושג האורך.

כל פונקציה עם ערכים ממשיים יכולה לשמש כנורם של x אם עבור כל וקטור x מעל שדה המספרים הקומפלקסיים ולכל $\alpha \in C$ מתקיים:

א. $\|x\| > 0$ עבור $x \neq 0$.

ב. $\|x\| = 0$ אם"ם $x = 0$.

ג. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

ד. $\|x^1 + x^2\| \leq \|x^1\| + \|x^2\|$ (אי שויון המשולש).

דוגמא לנורם הוא <u>הנורם האוקלידי</u>:

$$\|x\|_2 \triangleq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

2.2.7 <u>מכפלה פנימית</u> - מכפלה פנימית של שני וקטורים x ו-y השיכים ל-(C^n, C) הוא מספר קומפלקסי המסומן $<x,y>$ והמוגדר על ידי:

$$< x, y > = x^* \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \qquad (2.12)$$

כאשר x^* הוא הצמוד הקומפלקסי של x.

הערות:

1. $$<x,y> \neq <y,x> = y^* \cdot x \qquad (2.13)$$

(2.13) הופך לשויון אם x ו-y ממשיים.

2. $$\|x\|_2 = (<x,x>)^{1/2}$$

3. אם $<x,y> = 0$ אזי x ו-y נקראים <u>אורטוגונליים</u>.

2.2.8 <u>דרגה (Rank) של מטריצה.</u>

דרגת המטריצה A , שתסומן $\rho(A)$, היא המספר המקסימלי של עמודות (או שורות) בלתי תלויות במטריצה A.

אם דרגת המטריצה $A_{n\times n}$ היא n אנו אומרים של-A דרגה מלאה.

ברור לכן של-$A_{n\times n}$ דרגה מלאה אס"ם $\det A \neq 0$.

אקויולנטית ניתן להגדיר שדרגת מטריצה היא הסדר הגדול ביותר של מינור של המטריצה שאינו אפס. כלומר, אם מינור אחד (או יותר) מסדר k אינו אפס אבל כל המינורים מסדר k+1 הם אפס אזי $\rho(A) = k$.

2.3 <u>ערכים עצמיים (ע"ע-ים) ווקטורים עצמיים (ו"ע-ים)</u>

נתונה המטריצה $A_{n\times n}$ ($A \in C^{n\times n}$).

2.3.1 <u>ע"ע-ים</u> של A הם הסקלרים λ עבורם למשואה $Av = \lambda v$ פתרונות $v \neq 0$.

<u>ו"ע-ים</u> ימניים של A הם הפתרונות v ($v \neq 0$) של $Av = \lambda v$.

$v^i \neq 0$ המקיים $Av^i = \lambda_i v^i$ נקרא הו"ע המתאים לע"ע λ_i.

2.3.2 המשואה $Av = \lambda v$ שקולה ל-

$$(\lambda I - A)v = 0 \tag{2.14}$$

ל-(2.14) פתרונות $v \neq 0$ אס"ם $\det(\lambda I - A) = 0$ מכאן שהע"ע-ים הם הפתרונות של:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \tag{2.15}$$

2.3.3 הפולינום $\Delta(\lambda)$ הנתון על ידי:

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) \tag{2.16}$$

נקרא ה<u>פולינום האופיני</u> של A.

המשואה (2.15):

$$\Delta(\lambda) = 0$$

נקראת ה<u>משואה האופינית</u> של A.

2.3.4 ניתן להראות כי:

1. לכל ע"ע נפרד קיים לפחות ו"ע אחד.
2. כל הו"ע-ים המתאימים לע"ע-ים נפרדים הינם בלתי תלויים.
3. אם ל-A n ע"ע-ים נפרדים אזי קימים בדיוק n ו"ע-ים בלתי-תלויים.

הערה:

1) לע"ע החוזר k פעמים עשויים להיות 1 עד k ו"ע-ים בלתי תלויים.

2) למטריצה סימטרית יש תמיד n ו"ע-ים בלתי תלויים גם אם יש לה ע"ע חוזרים.

2.3.5 <u>ו"ע שמאלי - r</u>

ו"ע-ים שמאליים של A מוגדרים כפתרונות השונים מאפס של :

$$r'(\lambda I-A) = 0 \qquad (2.17)$$

אם הו"ע-ים הימניים מנורמלים כך ש- $\|v_i\| = 1$ אזי ניתן להראות ש-

$$< r^j, v^i > = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad (2.18)$$

2.3.6 <u>המטריצה המודלית של</u> $A_{n\times n}$.

אם ל-A n ע"ע-ים λ_i עם n ו"ע-ים v^i בלתי תלויים ליניארית אזי הסט של הו"ע יכול לשמש כבסיס במרחב ה-n מימדי (C^n, C).

נסמן:

$$M = (v^1, v^2, \ldots, v^n) \qquad (2.19)$$

המטריצה M הנתונה ב-(2.19) אשר עמודותיה הם הו"ע-ים של A נקראת <u>המטריצה המודלית</u> של A.

<u>הערה</u>: שורות M^{-1} מהוות את הו"ע-ים השמאליים (המנורמלים) של A. (זאת היות ו- $MM^{-1} = I$ - השוה ל-(2.18)).

2.3.7 <u>חשוב הו"ע-ים (המטריצה המודלית)</u>

א. <u>ישירות מההגדרה (2.14)</u>

$$(\lambda I-A)v = 0 \qquad (2.14)$$

דוגמא: נתונה המטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -8 & 3 & 7 \\ -8 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

נפתור $\det(\lambda I-A)=0$ עבור הע"ע-ים:

$$|\lambda I-A|=\begin{pmatrix}\lambda-2 & 1 & -1\\ 8 & \lambda-3 & -7\\ 8 & 1 & \lambda-11\end{pmatrix}$$

ונקבל:

$$|\lambda I-A|=(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda-10)=0$$

ומכאן:

$$\lambda_1=2;\ \lambda_2=4;\ \lambda_3=10$$

נציב ב-$\lambda I-A$ את $\lambda_1=2$ ונפתור v^1 ($v^1=(v^1_1\ v^1_2\ v^1_3)^T$) מ-(2.14):

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 8 & -1 & -7\\ 8 & 1 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1_1\\ v^1_2\\ v^1_3\end{pmatrix}=0$$

נקבל:

$$v^1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

או כל וקטור אחר הפרופורציונלי ל-v^1 .

בצורה דומה נקבל:

$$v^2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\quad;\quad v^3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

ומכאן:

$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

ב. <u>מציאת הוי"ע-ים באמצעות $Adj(\lambda I-A)$</u>.

היות ו-$(\lambda I-A)(\lambda I-A)^{-1}=I$ נקבל מ-(2.7):

$$|\lambda I-A|\,I=(\lambda I-A)\,Adj(\lambda I-A) \qquad (2.20)$$

היות וב-$(\lambda_i I-A)$ לפחות שתי שורות תלויות אזי :

$$\rho(\lambda_i I-A)\le n-1$$

מכאן:

$$\rho(\mathrm{Adj}(\lambda_i I\text{-}A)) = 1 \qquad (2.21)$$

דהיינו כל עמודות $\mathrm{Adj}(\lambda_i I\text{-}A)$ תלויות.

אם נציב $\lambda = \lambda_i$ ב-(2.20) נקבל:

$$(\lambda_i I\text{-}A)\ \mathrm{Adj}(\lambda_i I\text{-}A) = |\lambda_i I\text{-}A|\ I = 0 \qquad (2.22)$$

השואת האגף השמאלי של (2.22) ל-

$$(\lambda_i I \cdot A)\ v^i = 0$$

מצביעה על כך שכל עמודה של $\mathrm{Adj}(\lambda_i I\text{-}A)$ השונה מאפס היא ו"ע.

<u>דוגמא</u>: נפתור הדוגמא הקודמת בשיטה זו:

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} (\lambda-3)(\lambda-11)+7 & -(\lambda-11)-1 & (\lambda-3)-7 \\ -8(\lambda-11)-56 & (\lambda-2)(\lambda-11)+8 & 7(\lambda-2)-8 \\ -8(\lambda-3)+8 & -(\lambda-2)+8 & (\lambda-2)(\lambda-3)-8 \end{pmatrix}$$

אם נציב $\lambda = \lambda_1 = 2$

$$\mathrm{Adj}(\lambda_1 I - A) = \begin{pmatrix} 16 & 8 & -8 \\ 16 & 8 & -8 \\ 16 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

והוקטור העצמי v^1 המתאים ל-λ_1 הוא כל וקטור הפרופורציונלי לאחת מעמודות $\mathrm{Adj}(\lambda_1 I\text{-}A)$, למשל:

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בצורה דומה נקבל עבור $\lambda = \lambda_2 = 4$:

$$\mathrm{Adj}(\lambda_2 I - A) = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

ומכאן

$$v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ועבור $\lambda = \lambda_3 = 10$ נקבל:

$$Adj(\lambda_3 I - A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -48 & 0 & 48 \\ -48 & 0 & 48 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$v^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ו-

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.4 <u>טרנספורמציה סימלרית</u>

2.4.1 נתונות $A_{n\times n}$ ו-$B_{n\times n}$

<u>הגדרה</u>: אם קיימת מטריצה $P_{n\times n}$ לא סינגולרית כך ש-

$$B = P^{-1} AP \qquad (2.23)$$

אנו אומרים ש-B דומה ל-A (B סימלרית ל-A) או B התקבלה מ-A באמצעות טרנספורמציה סימלרית.

2.4.2 אחת התכונות החשובות של מטריצות סימלריות נתונה במשפט הבא:

<u>משפט</u>: ע"ע-ים אינוריאנטים תחת טרנספורמציה סימלרית. במילים אחרות: לשתי מטריצות סימלריות אותם ע"ע-ים.

<u>הוכחה</u>: אם A ו-B סימלריות כב-(2.23) נכתוב:

$$\lambda I - B = \lambda I - P^{-1}AP = P^{-1}(\lambda I - A)\, P$$

לכן:

$$|\lambda I - B| = |P^{-1}|\,|\lambda I - A|\,|P| = |\lambda I - A|\,|P^{-1}P| = |\lambda I - A|$$

מ.ש.ל.

2.4.3 מ-(2.23) ברור ש-

$$B^k = P^{-1}A^kP \tag{2.24}$$

2.5 לכסון המטריצה A

2.5.1 הנח כי ל-$A_{n\times n}$ n ויע-ים בלתי תלויים v^i $(i = 1,2,\dots,n)$. כל v^i מתאים ל-λ_i. נראה כי:

$$\Lambda = M^{-1}AM \tag{2.25}$$

כאשר :

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i)$$

ו-M הינה המטריצה המודלית של A.

כל v^i מקיים:

$$\lambda_i v^i = Av^i \qquad i = 1,2,\dots,n \tag{2.26}$$

אם נצרף את n האגפים השמאליים והימניים של (2.26) נקבל:

$$(\lambda_1 v^1, \lambda_2 v^2, \dots, \lambda_n v^n) = (Av^1, Av^2, \dots, Av^n)$$

או:

$$(v^1, v^2, \dots, v^n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix} = A(v^1, v^2, \dots, v^n)$$

לכן:

$$M\Lambda = AM \tag{2.27}$$

נכפול (2.27) ב-M^{-1} ונקבל את (2.25).

מ.ש.ל.

2.5.2 מ-(2.25) ברור ש-A ו-Λ דומות (סימילריות).

2.5.3 מ-(2.24) נקבל:

$$\Lambda^k = M^{-1}A^kM \tag{2.28}$$

או

$$A^k = M\Lambda^kM^{-1} \tag{2.29}$$

2.6 <u>ו״ע-ים מוכללים - תבנית ג׳ורדן</u>

2.6.1 אם למטריצה $A_{n\times n}$ ע״ע-ים חוזרים לא תמיד ניתן להביאה לצורה המלוכסנת Λ .

2.6.2 אם ל-$A_{n\times n}$ ע״ע λ_i החוזר m פעמים מספר הו״ע-ים הבלתי תלויים המתאימים ל-λ_i שניתן למצוא תלוי בדרגת המטריצה $\lambda_i I-A$ ונתון על ידי:

$$n - \rho(\lambda_i I-A) \tag{2.30}$$

אם : $n - \rho(\lambda_i I-A) = m$

ניתן למצוא m ו״ע-ים בלתי תלויים המתאימים ל-λ_i .

2.6.3 דוגמא: נתונה A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I-A| = (\lambda-1)^2 (\lambda-2)$$

כלומר: $\lambda_1 = 1$; $m = 2$

$\lambda_2 = 2$

ברור שניתן למצוא שני ו״ע-ים בלתי תלויים (אחד עבור כל λ). השאלה היא אם ניתן למצוא לערך העצמי $\lambda_1 = 1$ וקטור עצמי בלתי תלוי נוסף.

היות ו- $\rho(\lambda_1 I-A) = 1$

ו- $n-\rho(\lambda_1 I-A) = 3-1 = 2 = m = 2$

ניתן למצוא וקטור עצמי בלתי תלוי שני המתאים ל- λ_1 .

את שני הו״ע-ים הבלתי תלויים המתאימים ל-λ_1 נמצא מתוך :

$$(\lambda_1 I - A)v = 0 ; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_3 \\ 0 \\ -v_3 \end{pmatrix} = 0$$

לכן $v_3 = 0$ ומכאן

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

את v^3 המתאים ל-ע״ע $\lambda_2 = 2$ נמצא באופן רגיל (סעיף 2.3.7):

$$v^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

והיות ול-A שלושה ו״ע-ים בלתי תלויים ניתן ללכסנה לפי (2.25)

$$\Lambda = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & & O \\ & 1 & \\ O & & 2 \end{pmatrix}$$

2.6.4 אם $n - (\rho\lambda_i I - A) < m$

לא נוכל למצוא m ו״ע-ים בלתי תלויים הקשורים ל-λ_i . במקרה זה גם לא ניתן ללכסן את A . נוכל במקרים אלו להביא את A **לתבנית ג׳ורדן** (Jordan) הנתונה על ידי:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ O & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix} \qquad (2.31)$$

כל J_i בתבנית הנ״ל נקרא בלוק הקשור ל-ע״ע מסוים ונתון על ידי:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & & \\ & \lambda_i & * & 0 \\ & & & * \\ O & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{m \times m} \tag{2.32}$$

כאשר m הינו מספר החזרות של λ_i וכאשר * הוא 1 או 0.

J נתונה על ידי:

$$J = \bar{M}^{-1} A \bar{M} \tag{2.33}$$

כאשר עמודות $\bar{M}$ הן אותם ו״ע-ים בלתי תלויים שניתן למצוא ושאר העמודות הן ו״ע-ים מוכללים.

2.6.5 <u>ו״ע-ים מוכללים</u> - לא נטפל כאן במקרה הכללי אלא במקרה הפשוט יותר בו ה-* ב-J_i שב-(2.32) הם כולם 1. דהיינו J_i נתון על ידי:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & 0 \\ & & & 1 \\ O & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{m \times m} \tag{2.34}$$

הדרך למציאת הו״ע-ים הקשורים ל-λ_i החוזר k_i פעמים היא להשתמש בקשר :

$$\bar{M}J = A\bar{M} \tag{2.35}$$

ולהניח כי J_i נתון על ידי (2.34).

אם נסמן את עמודות $\bar{M}$ על ידי - v^i , אזי קיים J_i מסדר m הקשור לע״ע λ_i אם ורק אם m הוקטורים הבלתי תלויים v^j $(j = 1,\dots,m)$ מקיימים:

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)v^1 &= 0 \\ (\lambda I - A)v^2 &= -v^1 \\ &\vdots \\ (\lambda I - A)v^m &= -v^{m-1} \end{aligned} \tag{2.36}$$

כדי להבהיר את (2.36) נניח כי ל-$A_{m\times m}$ ע״ע אחד λ החוזר m פעמים וכי J נתון על ידי (2.34). אם

נכתוב עבור מקרה זה את (2.35) במפורש:

$$(v^1\ v^2 \dots v^m)\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} = (Av^1,\ Av^2,\ \dots Av^m)$$

תשווה עמודה ימנית לשמאלית נקבל את (2.36).

הוקטורים $v^2 \dots v^m$ המקימים את (2.36) נקראים וי"ע-ים מוכללים.

הערה: יש להדגיש שהשמוש ב-(2.36) הוא בצורת "נסה ושגה" שכן אין אנו יודעים מראש כי J_i הוא במתכונת שב- (2.34).

2.6.6 דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1\ ;\quad \lambda_3 = 2$$

עבור הע"ע החוזר λ_1 נקבל מ-(2.30)

$$n - \rho(\lambda_1 I - A) = 3 - 2 = 1$$

לכן ניתן למצוא רק וי"ע אחד הקשור ל-$\lambda = 1$.

היות ו-

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} (\lambda-1)(\lambda-2) & 0 & 0 \\ \lambda-2 & (\lambda-1)(\lambda-2) & 0 \\ 3+2(\lambda-1) & 3(\lambda-1) & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}^T$$

נקבל עבור $\lambda_1 = 1$:

$$\mathrm{Adj}(\lambda_1 I - A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ועבור $\lambda_3 = 2$:

$$\mathrm{Adj}(\lambda_3 I - A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad v^3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

v^2 הוא ו"ע מוכלל שנגסה למצאו לפי (2.36):

$$(\lambda_1 I - A)v^2 = -v^1$$

הצבת המספרים תתן:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \\ v_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ונקבל $v_2^2 = 1$; $v_3^2 = 0$. נבחר $v_1^2 = 0$ ולכן:

$$v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מכאן:

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \bar{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הצבת הנ"ל ב-(2.33) תתן:

$$\bar{M}^{-1}A\bar{M} = J = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} J_1 & 0 \\ \hline O & 2 \end{array}\right)$$

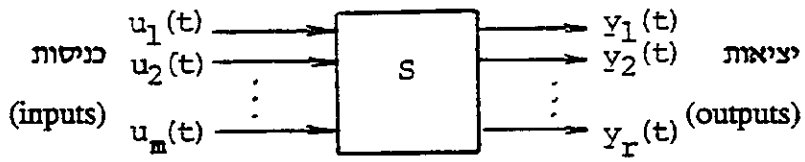
J_1 - הבלוק הקשור ל-$\lambda=1$ מתקבל במתכונת של (2.34).

פרק 3 : מרחב המצב (תאור פנימי של מערכות)

בפרק זה נעסוק בתאור מערכות דינמיות באמצעות משתני מצב..

I מערכות רציפות

3.1 נתונה המערכת הדינמית S.



ציור 3.1

כאשר $u_i(t)$ הן הכניסות ו-$y_j(t)$ הן היציאות.

המערכת הדינמית S ניתנת לתאור על ידי משואות דפרנציאליות רגילות ליניאריות עם מקדמים קבועים או תלויים בזמן.

<u>מערכת MIMO</u> ליניארית תתואר על ידי סט המשואות הדיפרנציאליות:

$$\sum_{i=0}^{n_k} a_{ki} y_k^{(i)} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{n_{kj}} b_{kji} u_j^{(i)} \qquad k = 1, \ldots, r \tag{3.1}$$

כאשר m - מספר הכניסות

r - מספר היציאות

ו-

$$y^{(i)} \triangleq \frac{d^i y}{dt^i}$$

<u>מערכת SISO</u> ליניארית תתואר על ידי המשואה:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^{m} b_i u^{(i)} \tag{3.2}$$

<u>מערכת קבועה בזמן (סטציונרית)</u> - אם המקדמים a_{ki} ו- b_{kji} אינם תלויים בזמן.

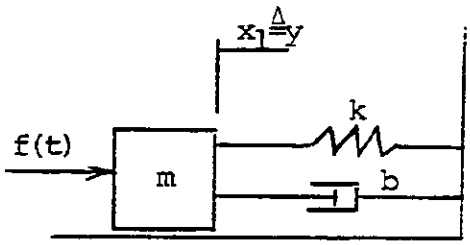
3.2 משתני מצב - דוגמת מבוא

נתונה המערכת קפיץ מסה ומרסן שבציור 3.2.

המערכת מונעת על ידי הכח $f(t)$.

המשואה הדיפרנציאלית:

$$m\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + kx_1 = f(t) \qquad (3.3)$$



ציור 3.2:

m - מסה

b - מקדם רסון

k - קבוע הקפיץ

נסמן את מקומה הרגעי של המסה על ידי x_1 , ואת מהירותה הרגעית על ידי x_2 . ניתן אז לכתוב את (3.3) על ידי שתי משואות מסדר ראשון:

$$\dot{x}_1 \triangleq x_2 \qquad (3.4)$$

$$\dot{x}_2 \triangleq \ddot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}f(t) \qquad (3.5)$$

נסמן: $u(t) \triangleq f(t)$ (כניסה)

$y(t) \triangleq x_1(t)$ (יציאה)

ונגדיר וקטור x : $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

נרשום את (3.4) ו-(3.5) בצורה מטריציונית:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \qquad (3.6)$$

$$y = [\,1 \quad 0\,]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

המבנה (3.6) ניתן לרישום בצורה כללית:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}} \qquad (3.7)$$

משואת המצב

משואת היציאה

כאשר:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{(n \times 1)} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}_{(n \times n)}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}_{(m \times 1)} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}_{(n \times m)}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}_{(r \times 1)} \qquad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & & \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rn} \end{bmatrix}_{(r \times n)} \qquad D = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ \vdots & & \\ d_{r1} & \cdots & d_{rm} \end{bmatrix}_{(r \times m)}$$

וכאשר:

x - וקטור המצב $(x \in R^n)$

u - וקטור הכניסה $(u \in R^m)$

y - וקטור היציאה. $(y \in R^r)$

3.3 <u>הגדרות:</u>

א) מצב מערכת דינמית - סט של n משתנים $x_1(t) \ldots x_n(t)$ הנקראים משתני מצב כך שתנאי ההתחלה של סט זה $(i = 1,\ldots,n)$ $x_i(t_o)$, והכניסות למערכת $(j = 1,\ldots,m)$ $u_j(t)$ (עבור $t \geq t_0$), קובעים חד משמעית את התנהגות המערכת עבור $t \geq t_0$.

<u>הערות</u>:

1) קיים מינימום של משתני מצב הדרוש לתאור מערכת.

2) משתני המצב אינם חייבים להיות גדלים בעלי משמעות פיזיקלית הניתנים לעקיבה או למדידה. הללו עשויים להיות גדלים מתמטיים.

3) בחירת משתני המצב או הצגת המערכת באמצעות משתני מצב אינה יחידה. את אותה המערכת ניתן להציג באמצעות סטים שונים של משתני מצב כפי שנראה בהמשך.

ב) וקטור המצב - הסט של כל משתני המצב $x_i(t)$ $(i = 1,\dots,n)$ אשר ניתן להציגו באמצעות וקטור n מימדי $x(t)$.

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

ג) מרחב המצב - זהו המרחב ה-n-מימדי שבו רכיבי וקטור המצב מהווים את צירי הקואורדינטות.

ד) ממוש המערכת (ריאליזציה) - הצגת מערכת דינמית בצורה (3.7) נקראת ממוש או ריאליזציה.

ה) מימד המערכת - מימד וקטור המצב (מס' משתני המצב).

ו) ממוש מינימלי - ממוש בו מימד וקטור המצב הוא המינימלי הדרוש לתאור המערכת בצורה (3.7).

3.4 <u>הערות להצגת המערכת במרחב המצב</u>

1) ההצגה (3.7) היא סט של משואות מסדר ראשון במשתני המצב (מערכת SISO המתוארת על ידי (3.2) ותתואר בדרך כלל במרחב המצב על ידי n משואות מסדר ראשון).

2) במערכת סטציונרית המטריצות A B C ו-D קבועות.

במערכת התלויה בזמן המטריצות A(t) B(t) C(t) ו-D(t) תלויות בזמן. (כולן או חלקן).

3) במערכת חפשית (שאינה מאולצת - $u \equiv 0$):

$$\dot{x} = Ax$$

$$y = Cx \qquad (3.8)$$

הראשית $x = 0$ היא אז נקודת שווי משקל.

4) במערכת SISO (u ו-y סקלרים) המטריצה B היא וקטור עמודה b והמטריצה C הינה וקטור שורה c.

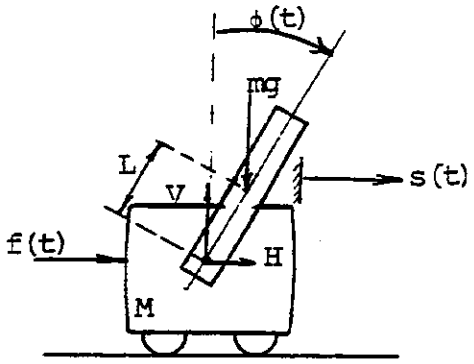
3.5 בחירת משתני מצב

אין דרך יחידה לבחור את משתני המצב. ניתן לבחור משתני מצב בעלי משמעות פיזיקלית כמו למשל בדוגמא 3.2 (שם x_1 - מקומה הרגעי של של המסה m ו-x_2 מהירותה הרגעית) או בצורה שיטתית ישירות מהמשואות הדפרנציאליות.

כתיבת מימושים על ידי בחירת משתני מצב פיזיקליים איננה פשוטה לעיתים. אפילו במערכות SISO (משואה (3.2)) אין זה טריביאלי להגיע למשואות מצב אם מופיעות באגף הימני נגזרות הכניסה (קח כדוגמא את (1.32) ונסה לחזור על התהליך שבדוגמא (3.2)).

במסגרת סעיף זה נביא שני ממושים "שיטתיים" שניתן להגיע אליהם ישירות מהמשואות הדיפרנציאליות. דהיינו, ניתן לכתוב את אברי המטריצות A , B , C , D ישירות מתוך מקדמי המשואות הדיפרנציאליות. מימושים מסוג זה נקראים מימושים קנוניים. שני הממושים הקנוניים שנביא יוצגו עבור מערכות SISO בלבד. קבלת מימושים קנוניים עבור מערכות MIMO מורכבת יותר ולא נעסוק בה בקורס זה.

3.5.1 בחירה פיזיקלית - דוגמא (מטוטלת הפוכה)



ציור 3.3

צירה של מטוטלת הפוכה רתום לעגלה הנעה אפקית כתוצאה מפעולת כוח f(t) (הכניסה למערכת). המרחק האפקי של העגלה ברגע t מסומן על ידי s(t). ההעתק הזויתי של המטוטלת כרגע t - φ(t). מסת המטוטלת - m, מומנט האינרציה שלה סביב מרכז הכובד - J , מסת העגלה - M.

העגלה מפעילה על המטוטלת בציר כוחות ראקציה :

כח אפקי - H(t) וכח אנכי - V(t).

μ - מקדם החכך הויסקוזי בין העגלה למשור האפקי.

משואות התנועה:

המטוטלת:

$$m\frac{d^2}{dt^2}[s(t) + L\sin\phi(t)] = H(t) \qquad (3.9a)$$

$$m\frac{d}{dt^2}[L\cos\phi(t)] = V(t) - mg \qquad (3.9b)$$

$$J\frac{d^2\phi}{dt^2} = LV(t)\sin\phi(t) - LH(t)\cos\phi(t) \qquad (3.9c)$$

העגלה:

$$M\cdot\frac{d^2s}{dt^2}=f(t)-H(t)-\mu\frac{ds(t)}{dt} \qquad (3.9d)$$

ובצורה מפורשת:

$$m\ddot{s}-mL\dot{\phi}^2\sin\phi+mL\ddot{\phi}\cos\phi=H \qquad (3.10a)$$

$$-mL\dot{\phi}\sin\phi-mL\dot{\phi}^2\cos\phi=V-mg \qquad (3.10b)$$

$$J\ddot{\phi}=LV\sin\phi-LH\cos\phi \qquad (3.10c)$$

$$M\ddot{s}=f-H-\mu s \qquad (3.10d)$$

חלוץ H ו-V מתוך (3.10a) ו-(3.10b) והצבה ב-(3.10c) מביאים ל:

$$J\ddot{\phi}=L\sin\phi(-mL\ddot{\phi}\sin\phi-mL\dot{\phi}^2\sin\phi+mg)-L\cos\phi(m\ddot{s}-mL\dot{\phi}^2\sin\phi)$$

או

$$(J+mL^2)\ddot{\phi}-Lmg\sin\phi+(mL\cos\phi)\ddot{s}=0 \qquad (3.11)$$

בהנחה ש-m<<M ניתן להזניח את השפעת H על תנועת העגלה.

משואה (3.10d) תתן לכן:

$$M\ddot{s}+\mu\dot{s}=f \qquad (3.12)$$

משואות (3.11) ו-(3.12) הינן משואות התנועה של המערכת. משואה (3.11) אינה ליניארית. אבל אם נתמקד בחקירת תנועת המערכת באזור סביב $\phi=0$ נוכל לקבל מערכת משואות ליניאריות.

עבור $\phi\sim 0$ נכתוב: $\sin\phi=\phi \quad ; \quad \cos\phi=1$

ונקבל:

$$\frac{J+mL^2}{mL}\ddot{\phi}-g\phi+\ddot{s}=0$$

$$M\ddot{s}+\mu\dot{s}=f$$

נסמן:

$$(J+mL^2)/mL=L'$$

ונקבל לבסוף:

$$L'\ddot{\phi} - g\phi + \ddot{s} = 0$$

(3.13)

$$M\ddot{s} + \mu\dot{s} = f$$

מטרתנו להציג המערכת הנ"ל באמצעות משתני מצב פיזיקליים. נבחר לכן:

$$x_1 \triangleq s \quad ; \quad x_2 \triangleq \phi \quad ; \quad x_3 \triangleq \dot{s} \quad ; \quad x_4 \triangleq \dot{\phi} \quad ; \quad u \triangleq f$$

ומכאן משואות המצב:

$$\dot{x}_1 = \dot{s} = x_3$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\phi} = x_4$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{s} = -\frac{\mu}{M}\dot{s} + \frac{1}{M}f = -\frac{\mu}{M}x_3 + \frac{1}{M}u$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{\phi} = \frac{g}{L'}\phi - \frac{1}{L'}\ddot{s} = \frac{g}{L'}x_2 - \frac{1}{L'}\left(-\frac{\mu}{M}x_3 + \frac{1}{M}u\right) = \frac{g}{L'}x_2 + \frac{\mu}{ML'}x_3 - \frac{1}{ML'}u$$

ואם

$$x \triangleq (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4)^T$$

אזי:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu}{M} & 0 \\ 0 & \frac{g}{L'} & \frac{\mu}{ML'} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ -\frac{1}{ML'} \end{pmatrix} u$$

(3.14)

משואת היציאה תלויה כמובן בהגדרת היציאה.

אם נבחר $y = \phi$ אזי:

$$y = x_2$$

ולכן:

$$y = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)\, x$$

אם נבחר $y = \begin{pmatrix} s \\ \phi \end{pmatrix}$ יהיה:

$$y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ולכן משואת היציאה במקרה זה תהיה:

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

אם נבחר

$$y = \begin{pmatrix} s \\ s + 2\phi \\ \dot{s} - 3\dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_3 - 3x_4 \end{pmatrix}$$

תהיה משוואת היציאה

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} x$$

ובאם נבחר:

$$y = \begin{pmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} =$$

נקבל:

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\mu}{M} & 0 \\ 0 & g/L' & \frac{\mu}{ML'} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1/M \\ -1/ML' \end{pmatrix} u$$

3.5.2 בחירה שיטתית (הצורה המלווה - Companion Form)

צורה זו גם נקראת "ממוש קנוני בקר".

נכתוב את (3.2) באמצעות האופרטור $D \triangleq \frac{d}{dt}$.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y = \sum_{i=0}^{n} b_i D^i u \qquad (3.15)$$

מבלי לאבד מהכלליות נניח כי:

$$a_n = 1$$

אם נגדיר:

$$P(D) = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i \quad ; \qquad Q(D) = \sum_{i=0}^{n} b_i D^i$$

נקבל:

$$P(D)y = Q(D)u \tag{3.16}$$

נגדיר משתנה חדש v כך ש-

$$P(D)v = \sum_{i=0}^{n} a_i v^{(i)} = u \tag{3.17}$$

נכפול (3.17) ב-Q(D) :

$$Q(D)\,P(D)v = Q(D)u = P(D)y$$

ולכן:

$$y = Q(D)v = \sum_{0}^{n} b_i v^{(i)} \tag{3.18}$$

עתה נבחר את משתני המצב כך ש:

$$\dot{x}_i = x_{i+1} = v^{(i)} \qquad i = 1, 2, \ldots n-1 \tag{3.19}$$

או באופן מפורש:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = \dot{v} \\ \dot{x}_2 &= x_3 = \ddot{v} \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n = v^{(n-1)} \end{aligned} \tag{3.20}$$

ב-(3.20) חסרה משואת המצב של $\dot{x}_n$. את $\dot{x}_n$ נקבל מ-(3.17).

$$\dot{x}_n = v^{(n)} = -a_0 v - a_1 \dot{v} \ldots - a_{n-1} v^{(n-1)} + u \tag{3.21}$$

(זכור כי הנחנו $a_n=1$) או

$$\dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 \ldots - a_{n-1} x_n + u \tag{3.22}$$

את (3.20) ו-(3.22) נכתוב בצורה מלוכדת:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u \qquad (3.23)$$

את משואת היציאה נקבל מתוך (3.18), (3.20) ו-(3.21):

$$y = (b_0 - a_0 b_n)x_1 + (b_1 - a_1 b_n)x_2 + \dots (b_{n-1} - a_{n-1} b_n)x_n + b_n u$$

או

$$y = \underbrace{(b_0 - a_0 b_n,\quad b_1 - a_1 b_n, \dots, b_{n-1} - a_{n-1} b_n)}_{C} x + \underbrace{b_n}_{D} u \qquad (3.24)$$

הממוש (3.23) ו-(3.24) נקרא בשם **הצורה המלווה**. ידיעת מקדמי המשואה הדיפרנציאלית (3.2), (או (3.15)): $a_i, b_i \quad (i = 1,\dots,n)$ (עם $a_n = 1$) מאפשרת כתיבת הממוש ישירות מהמשואה הדיפרנציאלית.

<u>מקרה פרטי:</u>

במערכות פיזיקליות רבות הנגזרת הגבוהה ביותר של הכניסה, u, נמוכה מהנגזרת הגבוהה ביותר של היציאה y.

במילים אחרות אם המשואה הדיפרנציאלית נתונה על ידי:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^{m} b_i u^{(i)} \qquad (3.25)$$

ו-

$$m \le n-1 \qquad (3.26)$$

אזי $b_n = 0$,

ומשואת היציאה (3.24) תהיה:

$$y = \underbrace{(b_0, b_1, \dots b_{n-1})}_{C} x \qquad (3.24a)$$

<u>הערות:</u>

1. בממוש בצורה המלווה:

א. הוקטור B אינו תלוי במקדמי המשואה. כולו אפסים פרט לאיבר האחרון השווה ל-1. (כאשר הנחנו $a_n = 1$).

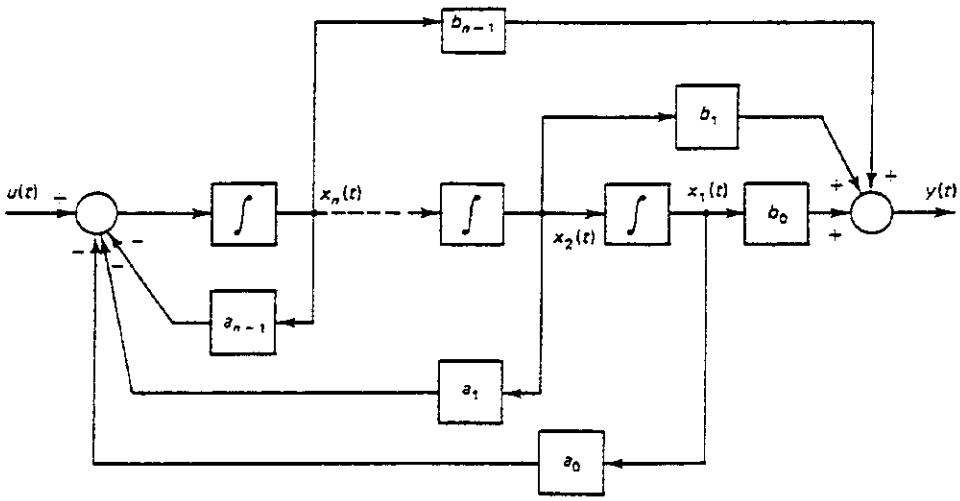
ב. n-1 השורות הראשונות במטריצה A אינן תלויות במקדמי המשואה.

ג. במקרים בהם $b_n = 0$ אברי הוקטור C הם מקדמי נגזרות הכניסה (ראה (3.24a)), ו-$d = 0$.

ד. אם $b_n \neq 0$ אזי $d = b_n$ (ראה (3.24)).

2. עבור מערכת SISO המתוארת על ידי משואה דיפרנציאלית מסדר n התקבל שמימד וקטור המצב הוא n. פרט למקרים מיוחדים זהו המימד המינימלי של ווקטור המצב הדרוש. על המקרים המיוחדים נעמוד בפרק מאוחר יותר.

3. סכימת הבלוקים של הממוש עבור $a_n = 1$ ו-$b_n = 0$ נתונה בציור 3.4. האלמנט הדינמי היחידי בסכימה זו הם n אינטגרטורים. פרט לאלו יש בסכימה כופלים (בקבוע) ושני מסכמים. האינטגרטור, הכופל בקבוע והמסכם הם אלמנטים בסיסיים של מחשב אנלוגי. אי לכך סכימת הבלוקים בציור 3.4 היא סכמת הבלוקים לדמוי (סימולציה) המערכת על מחשב אנלוגי. יתרה מכך, אם ברצוננו "ליצר" מערכת הנוהגת לפי משואה דיפרנציאלית כמו (3.2), נרכיבה לפי סכימת בלוקים זו.



ציור 3.4

דוגמא:

נחזור לדוגמת המטוטלת והעגלה ב-(3.5.1).

אם נכתוב את (3.13) באמצעות האופרטור D:

$$(D^2 - g/L')\phi = -\frac{1}{L'}D^2 s$$

$$(MD^2 + \mu D)s = u$$

ונחלץ את s מהמשואה השניה ונציבה לראשונה נקבל את המשואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$\ddddot{y} + \frac{\mu}{M}\dddot{y} - (g/L')\ddot{y} - \frac{g\mu}{L'M}\dot{y} = -\frac{1}{ML'}\ddot{u} \qquad (3.27)$$

כאשר הגדרנו:

$$y \triangleq \phi \quad ; \quad u \triangleq f$$

משואה (3.27) היא משואה דיפרנציאלית אחת המתארת את המערכת עגלה + מטוטלת.

במשואה זו:

$$n = 4 \; ; \quad a_4 = 1 \; ; \quad a_3 = \frac{\mu}{M} \; ; \quad a_2 = -\frac{g}{L'} \; ; \quad a_1 = -\frac{g\mu}{L'M} \; ; \quad a_0 = 0$$

$$b_4 = b_3 = b_1 = b_0 = 0 \quad ; \quad b_2 = -\frac{1}{ML'}$$

אם נציב ערכים אלו ב-(3.23) וב-(3.24) נקבל את הממוש בצורה המלווה למערכת זו:

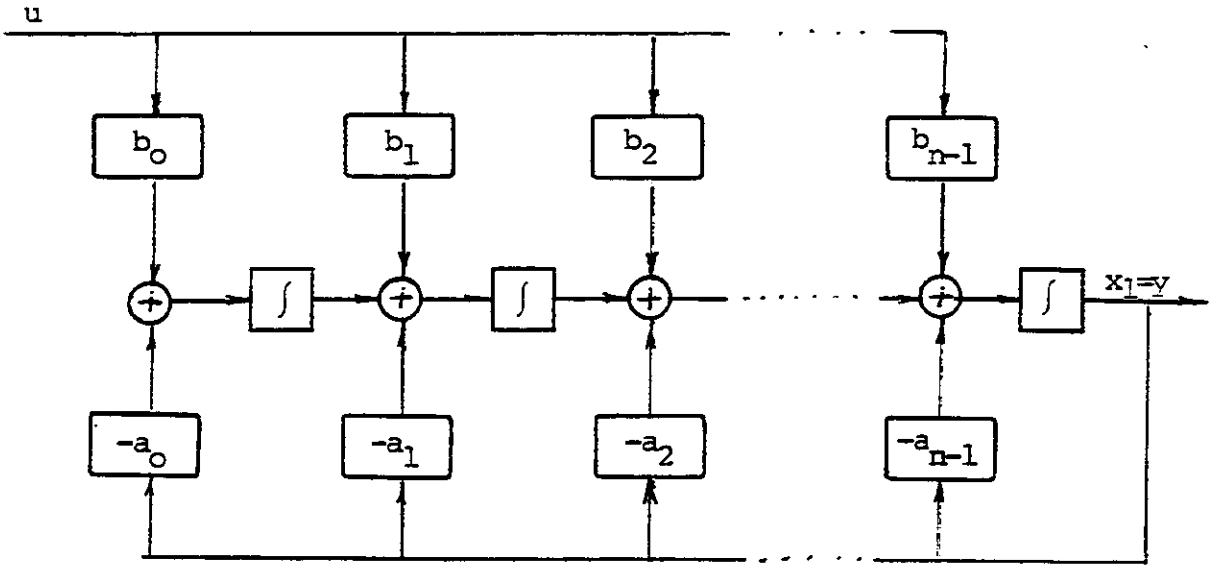
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{g\mu}{L'M} & \frac{g}{L'} & -\frac{\mu}{M} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \left(0 \, , \, 0 \, , \, -\frac{1}{ML'} \, , \, 0 \right) x$$

3.5.3 בחירה שיטתית (צורת המשערך - Observer form)

זהו ממוש שונה מהקודם אשר ניתן להגיע אליו בדרך דומה לפיתוח הקודם.

סכימת הבלוקים של מימוש זה (עבור $a_n = 1$ ו-$b_n = 0$) נתתה בציור 3.5.



<u>ציור 3.5</u>:

מטריצות הממוש בצורה קנונית זו הן (עבור $b_n \neq 0$ ו-$a_n = 1$):

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_{n-1} - a_{n-1} b_n \\ b_{n-2} - a_{n-2} b_n \\ \vdots \\ b_0 - a_0 b_n \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

$$C = [1 \quad 0 \dots 0] \qquad d = b_n$$

דוגמא - מטוטלת הפוכה :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{\mu}{M} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g}{L'} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{g\mu}{L'M} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{ML'} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\, x = x_1$$

3.5.4 סיכום

מספר רב של מערכות ניתנות לתאור על ידי סט של משואות דיפרנציאליות מהצורה:

$$\dot{x}(t) = f[x(t),\ u(t),\ t]$$

$$y(t) = g[x(t),\ u(t),\ t] \qquad (3.29)$$

כאשר x - וקטור המצב, f - וקטור פונקציות, u - וקטור הכניסה ו-y וקטור היציאה.

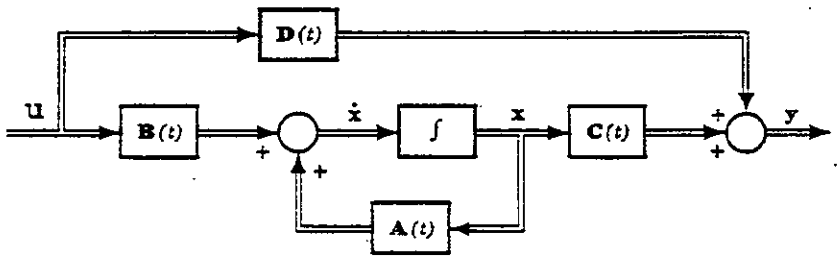
אנו הצגנו בפרק זה את המקרים בהם f ו-g הינן פונקציות ליניאריות. במקרים אלו ההצגה (3.29) תהיה:

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y = C(t)x(t) + D(t)u(t) \qquad (3.30)$$

עבור מערכות תלויות בזמן. אם המערכת סטציונרית נקבל את (3.7) .

סכימת הבלוקים של (3.7) או (3.30) נתונה על ידי:



ציור 3.6:

II. מערכות בדידות

3.6 מערכות בדידות ניתן לסווג לשתי קבוצות:

א. מערכות בדידות מיסודן כמו מחשב דיגיטלי, פילטר דיגיטלי, מערכות מונטריות, מערכות מלאי. במערכות כאלו בוחנים התנהגות המערכת בזמנים בדידים בלבד t_i $(i = 1,2,...)$.

ב. מערכות בדידות הנובעות מבחינת מערכות רציפות בזמנים בדידים. גישה זו ננקטת בדרך כלל כאשר מערכת דינמית מורכבת מצרוף של מערכות בדידות ורציפות. מקרה אופיני הן מערכות בקרה בהן מבוקר תהליך רציף על ידי בקר דיגיטלי.

3.7 המערכת הדינמית הבדידה הליניארית ניתנת לתאור על ידי משוואות הפרשים:

מערכת MIMO:

$$\sum_{i=0}^{n_p} a_{pi}\, y_p(k+i) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{n_{pj}} b_{pji}\, u_j(k+i) \qquad p = 1, \ldots r \tag{3.31}$$

כאשר :

u_j - הרכיב ה-j של וקטור הכניסה $(j=1,2,...,m)$

y_p - הרכיב ה-p של וקטור היציאה $(p=1,2,...,r)$

$V(k+i)$ - ערך V ברגע t_{k+i}.

מערכת SISO:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, y(k+i) = \sum_{i=0}^{n} b_i\, u(k+i) \tag{3.32}$$

3.8 את המערכות הבדידות ניתן להציג במרחב המצב באופן אקויולנטי למערכות רציפות:

$$\begin{aligned} x(i+1) &= f[x(i),u(i),i] \\ y(i) &= g[x(i),u(i),i] \end{aligned} \tag{3.33}$$

כאשר:

$x(i)_{n\times 1}$ - וקטור המצב ברגע t_i.

$u(i)_{m\times 1}$ - וקטור הכניסה ברגע t_i.

$y(i)_{r\times 1}$ - וקטור היציאה ברגע t_i.

אם המערכת (3.33) ליניארית תלויה בזמן תהיינה משואות המצב והיציאה של המערכת נתונות על ידי:

$$x(i+1) = A(i)x(i) + B(i)u(i)$$

(3.34)

$$y(i) = C(i)x(i) + D(i)u(i)$$

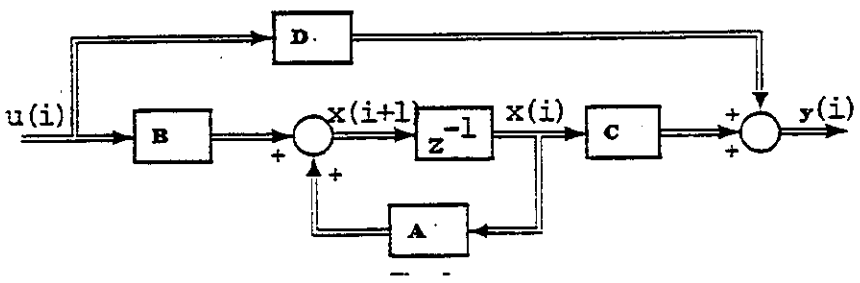
ובאם המערכת (3.34) אינה תלויה בזמן (סטציונרית):

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i)$$

(3.35)

$$y(i) = Cx(i) + Du(i)$$

3.9 סכימת הבלוקים של (3.34) ו-(3.35) נתונה על ידי:



ציור 3.7:

כאשר z הוא אופרטור הזזה קדימה אשר הוגדר ב-(1.46), (1.47).

3.10 בחירת משתני מצב (ממוש מערכות בדידות):

גם במערכות בדידות כמו במערכות רציפות ניתן לממש המערכת על ידי בחירת משתני מצב עם משמעות פיזיקלית או בצורה שיטתית.

3.10.1 בחירה פיזיקלית (דוגמא)

נשתמש בדוגמת תכניות החסכון (1.4.3.4). אם בדוגמא זו הכניסה $u(i)$ והיציאה $y(i)$ מוגדרות כדלהלן:

$u(i)$ - סך ההפקדות בחודש ה-i .

$y(i)$ - מאזן כללי בתחילת החודש ה-i .

נוכל לבחור משתני מצב פיזיקליים כך:

$x_1(i)$ - מאזן חשבון החסכון בתכנית א' בתחילת החודש ה-i .

$x_2(i)$ - מאזן חשבון החסכון בתכנית ב' בתחילת החודש ה-i .

מכאן:

$$x_1(i+1) = (1+\alpha)x_1(i) + 0.6u(i)$$

$$x_2(i+1) = (1+\beta)x_2(i) + 0.4u(i)$$

ו-

$$y(i) = x_1(i) + x_2(i)$$

המשואות הנ"ל הן במתכונת של משואות המצב (3.35):

$$x(i+1) = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & 1+\beta \end{pmatrix} x(i) + \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} u(i)$$

$$y(i) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(i)$$

כאשר :

$$x(i) \triangleq \begin{pmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \end{pmatrix}$$

3.10.2 בחירה שיטתית - ממושים קנוניים.

בדומה למערכות רציפות גם כאן ניתן לכתוב ממושים שונים ישירות מתוך משואות ההפרשים. יתרה מזאת, מטריצות הממושים תהיינה זהות לאלו שקבלנו במערכות רציפות. כלומר, אם המערכת הבדידה נתונה על ידי משואות ההפרשים (3.32) אזי ממוש המערכת בצורה המלווה יתקבל עם A , B , C ו-D כב-(3.23) ו-(3.24a) ובצורת המשערך כב-(3.28). גם סכימות הבלוקים של שני ממושים אלו (ציורים 3.4 ו-3.5) יהיו זהים אם כל אינטגרטור יוחלף באלמנט ההשהיה z^{-1}.

דוגמא: (המשך דוגמא 3.10.1).

נמצא משואת הפרשים אחת הקושרת היציאה $y(i)$ והכניסה $u(i)$ על ידי שמוש באופרטור z .

$$z\,x_1(i) = (1+\alpha)\,x_1(i) + 0.6u(i)$$

$$z\,x_2(i) = (1+\beta)\,x_2(i) + 0.4u(i)$$

או:

$$x_1(i) = \frac{0.6}{z-(1+\alpha)}\,u(i) \quad ; \quad x_2(i) = \frac{0.4}{z-(1+\beta)}\,u(i)$$

ונציב במשואת היציאה :

$$y(i) = x_1(i) + x_2(i) = \left(\frac{0.6}{z-(1+\alpha)} + \frac{0.4}{z-(1+\beta)}\right) u(i)$$

לכן:

$$[z^2-(2+\alpha+\beta)z + (1+\alpha)\,(1+\beta)]\,y(i) = [z - 1 - (0.6\beta+0.4\alpha]\,u(i)$$

או:

$$y(i+2) - \underbrace{(2+\alpha+\beta)}_{a_1}\,y(i+1) + \underbrace{(1+\alpha)(1+\beta)}_{a_0}\,y(i) =$$

$$= u(i+1) - \underbrace{[1+0.6\beta+0.4\alpha]}_{b_0}\,u(i)$$

ומכאן שהממוש בצורה המלווה יהיה:

$$x(i+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1+\alpha)(1+\beta) & (2+\alpha+\beta) \end{pmatrix} x(i) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(i)$$

$$y(i) = [-(1+0.6\beta+0.4\alpha),1]\,x(i)$$

3.11 טרנספורמציות ליניאריות של ממושים

ראינו כי למערכת פיזיקלית עשוי להיות מספר רב של ממושים. נראה זאת בצורה כללית יותר:

נניח כי המערכת הדינמית S מתוארת על ידי הממוש הבא:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$

(3.36)

$$y = Cx(t) + Du(t)$$

נבצע שינוי משתנים על ידי טרנספורמציה לא סינגולרית באמצעות המטריצה $T_{n\times n}$ $(\det T \neq 0)$:

$$x(t) = T\bar{x}(t) \tag{3.37}$$

נציב (3.37) ב-(3.36) :

$$T\dot{\bar{x}} = AT\bar{x} + Bu$$

$$y = CT\bar{x} + Du$$

נכפול הנ"ל ב-T^{-1} ונקבל:

$$\dot{\bar{x}} = T^{-1}AT\bar{x} + T^{-1}Bu$$

$$y = CT\bar{x} + Du$$

נסמן : $\bar{A} \triangleq T^{-1}AT \quad ; \quad \bar{B} \triangleq T^{-1}B \quad ; \quad \bar{C} \triangleq CT$ (3.38)

ונקבל:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u$$

$$y = \bar{C}\bar{x} + Du \tag{3.39}$$

(3.39) הינו ממוש אחר של אותה מערכת עם וקטור מצב חדש $\bar{x}$. היות וישנן הרבה מטריצות T לא-סינגולריות ברור שיש אין סוף ממושים לאותה מערכת.

3.12 <u>הערות:</u>

1. מ-(3.37) אנו רואים כי $\bar{A}$ סימלרית ל-A . מסקנה - בכל ממושי אותה המערכת המטריצות A סימלריות.
2. למרות שישנם אינסוף ממושים למערכת לא תמיד ניתן לקבל ממוש רצוי מסוים (ראה להלן סעיף (3.13)).
3. וקטורי היציאה y , והכניסה u אינם תלויים כמובן בממוש.

דוגמא:

בדוגמת המבוא בסעיף (3.2) קבלנו את הממוש הפיזיקלי הבא עבור המערכת המכנית (קפיץ מסה ומרסן).

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

ברצונו לקבל ממוש אחר בו

$$\bar{x}_1 = x_1 + x_2 = y + \dot{y}$$

$$\bar{x}_2 = x_1 - x_2 = y - \dot{y}$$

מכאן

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x = T^{-1} x$$

ולכן

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

לפי (3.38) נקבל:

$$\bar{A} = T^{-1} A T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}(k+b) & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2m}(k-b) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2m}(k+b) & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2m}(k-b) \end{pmatrix}$$

$$\bar{B} = T^{-1} B = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{C} = CT = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

והממוש החדש יהיה נתון לכן על ידי:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u$$

$$y = \bar{C}\bar{x}$$

נראה כי היציאה y במשואה האחרונה אינה תלויה בממוש: נציב $\bar{C}$ ו-$\bar{x}$ במפורש במשואת היציאה האחרונה:

$$y = \overline{C}\overline{x} = \frac{1}{2}\overline{x}_1 + \frac{1}{2}\overline{x}_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_1 - x_2) = x_1 = y$$

3.13 <u>קבלת ממושים מלוכסנים.</u>

בעיה: ברצוננו להתמיר ממוש נתון

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du \qquad (3.40)$$

לממוש:

$$\dot{\overline{x}} = \Lambda\overline{x} + B_d u$$

$$y = C_d\overline{x} + D_d u \qquad (3.40)'$$

בו Λ היא מטריצה אלכסונית הנתונה על ידי:

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

כאשר λ_i הם הע"ע של A ב-(3.40).

בפרק 2 הכרנו את התנאים עבורם ניתן ללכסן את המטריצה A . ראינו גם שלא תמיד ניתן ללכסנה. כאשר A לא ניתנת ללכסון ניתן להביאה לצורת ג'ורדן. הממוש המלוכסן באותם מקרים בהם לא ניתן ללכסן את A הוא דוגמא לממוש שלא ניתן להגיע אליו.

באותם מקרים בהם A ניתנת ללכסון נקבל את $(3.40)'$ מ-(3.40).אם המטריצה T שב-(3.37) תהיה המטריצה המודלית M. נקבל אז:

$$\Lambda = M^{-1}AM \;;\quad B_d = M^{-1}B \;;\quad C_d = CM \;;\quad D_d = D \qquad (3.41)$$

במקרים בהם לא ניתן ללכסן את A תהיה המטריצה M בחלקה מורכבת מו"ע מוכללים. אם נשתמש אז בקשרים שב-(3.41) יתקבל הממוש:

$$\dot{\overline{x}} = J\overline{x} + B_J u$$

$$y = C_J\overline{x} + D_J u \qquad (3.42)$$

<u>הערות</u>:

1) יתרונו של הממוש המלוכסן הוא בכך שמשוואות המצב בממוש זה אינן מצומדות.

2) למימושים $(3.40)'$ ו-(3.42) חשיבות רבה בהבנת וחקירת תכונות מערכות.

3) לממוש המלוכסן במקרה הבדיד תכונות נומריות טובות יותר מאשר למימושים אחרים (כמו למשל הממוש בצורה המלווה).

3.14 "לכסון" A עם ע"ע מורכבים.

למרות שבמערכות הנדסיות למטריצה A אלמנטים ממשיים, יופיעו מספרים קומפלקסיים בתהליך הלכסון במערכות להן ע"ע קומפלקסיים צמודים.

למשל, במערכת מסדר שניים עם ע"ע-ים $-\sigma \pm j\omega$ $(\sigma \geq 0\ ,\ \omega > 0)$ תתקבל הצורה האלכסונית של A בצורה :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\sigma + j\omega & 0 \\ 0 & -\sigma - j\omega \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

הוקטורים העצמיים, של המטריצה A, יהיו גם הם וקטורים קומפלקסיים צמודים:

$$v^1 = \alpha + j\beta \qquad v^2 = \alpha - j\beta \tag{3.44}$$

כאשר α ו-β הם וקטורים ממשיים.

בחלק מהשמושים ההנדסיים רצוי שלא להשתמש בגדלים קומפלקסיים. במקרים אלו משתמשים בטרנס-פורמציה הבאה:

$$x = T_m \bar{x} \tag{3.45}$$

כאשר

$$T_m = (\alpha\ ,\ \beta) \tag{3.46}$$

המטריצה $\bar{A}$ המתקבלת תסומן על ידי Λ_m ונתונה על ידי (עבור המערכת מסדר II)

$$\Lambda_m = T_m^{-1} A T_m = \begin{pmatrix} -\sigma & \omega \\ -\omega & -\sigma \end{pmatrix} \tag{3.47}$$

<u>דוגמא</u>: נתונה המטריצה A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הבא מטריצה זו לצורה מלוכסנת ללא ערכים קומפלקסיים.

<u>פתרון</u>:

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

הע"ע נתונים על ידי:

$$\lambda_1 = j \quad \lambda_2 = -j \quad \lambda_3 = -2$$

הוקטורים העצמיים נתונים על ידי:

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ 2j \end{pmatrix} \qquad v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ -2j \end{pmatrix} \qquad v^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$v^1 = \alpha + j\beta \qquad v^2 = \alpha - j\beta$$

כאשר:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

מכאן

$$T_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (\alpha \quad \beta \quad v^3)$$

$$\Lambda_m = T_m^{-1} A T_m = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

אלו היינו מלכסנים את A על ידי המטריצה המודלית היינו מקבלים:

$$\Lambda = M^{-1} A M = \begin{pmatrix} j & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3.15 מציאת שווי-משקל במערכות ליניאריות סטציונריות

3.15.1 מערכות רציפות

נתונה המערכת הליניארית הסטציונרית:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du \qquad (3.48)$$

עבור $u = u_e = const$ תגיע המערכת בתנאים מסוימים למצב שווי-משקל. (התנאי הנדרש הוא יציבותה האסימפטוטית של המערכת. על נושא זה נעמוד בפרק מאוחר יותר). מצב שווי משקל, x_e, מוגדר על ידי:

$$\dot{x}_e = 0 = Ax_e + Bu_e \qquad t \geq t_0 \tag{3.49}$$

אם מגיעה המערכת לשווי המשקל הרי x_e נתון על ידי:

$$x_e = -A^{-1}Bu_e \tag{3.50}$$

היציאה y_e נתתה אז על ידי:

$$y_e = (-CA^{-1}B + D)\, u_e \tag{3.51}$$

<u>הערות:</u>

1. אם $u_e = 0$ (מערכת חפשית) יהיה x_e נתון תמיד על ידי: $x_e = 0$
2. אם המערכת יציבה אסימפטוטית A אינה סינגולרית.

3.15.2 <u>מערכות בדידות</u>

נתונה המערכת:

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i$$

$$y_i = Cx_i + Du_i \tag{3.52}$$

באם $u_i = u_e = const$ תגיע (3.52) לשווי משקל, במידה והמערכת יציבה אסימפטוטית.

במצב שווי משקל יתקיים:

$$x_{i+1} = x_i = x_e \tag{3.53}$$

הצבת (3.53) ב-(3.52) תתן:

$$x_e = (I - A)^{-1}Bu_e$$

$$y_e = (C(I - A)^{-1}B + D)u_e \tag{3.54}$$

<u>הערות:</u>

1) אם $u_e = 0$ (מערכת חפשית) יהיה x_e נתון תמיד על ידי:

$$x_e = 0 \tag{3.55}$$

2) אם המערכת יציבה אסימפטוטית $\det(I-A) \neq 0$.

3.16 ליניאריזציה סביב נקודות שווי משקל

3.16.1 משואות המצב הליניאריות (3.7) או (3.30) הינן מקרה פרטי של משואות המצב הלא-ליניאריות (3.29):

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t) \qquad (3.29)$$

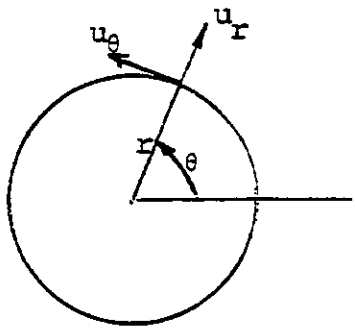
משואות המצב (3.29) הינן משואות וקטוריות לא ליניאריות תלויות בזמן. אם המערכת הלא ליניארית הינה סטציונרית נקבל במקום (3.29) את:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = g(x(t), u(t)) \qquad (3.56)$$

3.16.2 דוגמא

חללית בעלת מסה m נעה בתנועה דו-ממדית במסלול מעגלי נומינלי סביב כדור-הארץ. רדיוס המסלול הנומינלי r_o ומהירות הסבוב היא ω_o.



ציור 3.8:

משואות התנועה של החללית נתונות על ידי:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{K}{r^2} = \frac{1}{m} u_r \qquad (3.57)$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{m} u_\theta \qquad (3.58)$$

כאשר u_r - דחף רדיאלי ו-u_θ דחף משיקי.

באמצעות u_r ו-u_θ שולטים על תנועת החללית.

אם נבחר וקטור המצב לפי: $x^T = (r, \dot{r}, \dot{\theta})$

ואת וקטור הכניסה : $u^T = (u_1, u_2) = (u_r, u_\theta)$

תתקבלנה משואות המצב המתאימות:

$$\dot{x}_1 = \dot{r} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{K}{r^2} + \frac{1}{m}u_r = x_1 x_3^2 - \frac{K}{x_1^2} + \frac{1}{m}u_1$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \frac{1}{mr}u_\theta = -\frac{2x_2x_3}{x_1} + \frac{1}{mx_1}u_2$$

או:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 x_3^2 - \frac{K}{x_1^2} + \frac{1}{m}u_1 \\ -\frac{2x_2x_3}{x_1} + (\frac{1}{mx_1})u_2 \end{pmatrix} \qquad (3.59)$$

משואה (3.59) היא בדיוק במתכונת של (3.56).

3.16.3 במידה והמערכת הלא-ליניארית (3.56), פועלת באזור קרוב לנקודת שווי-משקל כלשהיא ניתן בתנאים מסוימים "להפוך" את (3.56) או (3.29) למשואה ליניארית על ידי ליניאריזציה סביב נקודת שווי-משקל.

<u>הגדרה</u>: נקודה (או נקודות) שווי משקל, x_e, של (3.56) מוגדרות על ידי:

$$\dot{x}_e = f(x_e, u_e) = 0 \qquad (3.60)$$

כאשר u_e שווה לוקטור אפס או לוקטור קבוע.

<u>הצהה</u>: ל-$f(\cdot)$ נגזרות ראשונות רציפות ביחס ל-x ול-u .

ממצב שווי משקל נבצע "הפרות קטנות" כדלקמן:

$$x(t) = x_e + \delta x(t) \quad ; \quad u(t) = u_e + \delta u(t)$$

$$\dot{x}(t) = \cancelto{0}{\dot{x}_e} + \dot{\delta x}(t) \quad ; \quad (\dot{\delta x}(t)) \stackrel{\Delta}{=} \frac{d}{dt}\delta x(t) \qquad (3.61)$$

נציב את (3.61) לתוך (3.56) ונקבל:

$$\dot{\delta x}(t) = f(x_e + \delta x\ ,\ u_e + \delta u) \tag{3.62}$$

עקב ההנחה נוכל לכתוב את (3.62) בצורה:

$$\dot{\delta x} = f(x_e, u_e) + \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x_e,u_e}\delta x + \frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{x_e,u_e}\delta u + h(x_e, u_e, \delta x, \delta u) \tag{3.63}$$

כאשר :

$$\frac{\partial f}{\partial x}_{(n\times n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}; \qquad \frac{\partial f}{\partial u}_{(n\times m)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{pmatrix} \tag{3.64}$$

ו-$h(\cdot)$ הוא איבר שארית.

<u>הנחה:</u>

$$\lim_{\substack{\|\delta x\| \to 0 \\ \|\delta u\| \to 0}} \frac{h(\delta x, \delta u)}{\|\delta x\|} = \lim_{\substack{\|\delta x\| \to 0 \\ \|\delta u\| \to 0}} \frac{h(\delta x, \delta u)}{\|\delta u\|} = 0 \tag{3.65}$$

<u>הערה</u>: באם $f(\cdot)$ ניתנת לפתוח לטור טיילור סביב (x_e, u_e) אזי $h(\cdot)$ מייצגת את החזקות של δx , δu מהחזקה השניה ומעלה. במקרה זה הנחה (3.65) מתקימת תמיד.

לכן, באיזור קרוב "מספיק" ל-x_e ועבור ערכים "קטנים" של $\|\delta u\|$ המערכת (3.56) תהיה נתונה על ידי:

$$\dot{\delta x} = A\delta x + B\delta u \tag{3.66}$$

כאשר:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x_e, u_e} \qquad B = \frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{x_e, u_e} \tag{3.67}$$

3.16.4 <u>דוגמא: המשך דוגמת החללית (3.16.2)</u>

נמצא x_e עבור $u_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\dot{x}_e = 0 = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 x_3^2 - K / x_1^2 \\ -2x_2 x_3 / x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{1,e} \\ \dot{x}_{2,e} \\ \dot{x}_{3,e} \end{pmatrix}$$

מקבלים $x_{2,e} = 0$. כדי ש- $x_{1,e} x_{3,e}^2 - K / x_{1,e}^2$ יהיה שוה ל-0 עם $x_{1,e} = r_0$ ו- $x_{3,e} = \omega_0$,

K חייב לקיים $K = r_0^3 \omega_0^2$.

מכאן:

$$x_e^T = (r_0, 0, \omega_0)$$

עתה נמצא A ו-B לפי (3.67) ו-(3.64) ונקבל:

$$(\dot{\delta x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 2r_0\omega_0 \\ 0 & -2\omega_0 / r_0 & 0 \end{pmatrix} \delta x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/m & 0 \\ 0 & 1/mr_0 \end{pmatrix} \delta u \qquad (3.68)$$

כאשר:

$$\delta x = x - x_e ; \qquad \delta u = u - u_e$$

משואה (3.68) היא המשואה הליניארית המתארת את דינמיקת החללית בקרבת המסלול הנומינלי.

3.16.5 <u>ליניאריזציה של משואות היציאה.</u>

בין אם משואות המצב הן ליניאריות ובין אם אינן ליניאריות משואות היציאה עשויות להיות לא ליניאריות. במידה ומשואות היציאה אינן ליניאריות הן תהיינה נתונות בצורה כללית על ידי:

$$y = g(x,u,t) \qquad y \in R^r \qquad (3.69)$$

או במקרה הסטציונרי:

$$y = g(x,u) \qquad (3.70)$$

אם:

$$y_e = g(x_e, u_e) \qquad (3.71)$$

תגדיר:

$$\delta y \stackrel{\Delta}{=} y - y_e \qquad (3.72)$$

נקבל בדרך דומה לזו שבאמצעותה קבלנו את (3.66), משואת יציאה ליניארית הנתונה על ידי:

$$\delta y = C\delta x + D\delta u \tag{3.73}$$

כאשר:

$$C_{r\times n} \triangleq \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{x_e,u_e} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}, \dots, & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots\dots\dots & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1} & , \dots\dots , & \frac{\partial g_r}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x_e,u_e}$$

$$D_{r\times m} \triangleq \frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{x_e,u_e} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2}, \dots, & \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \dots\dots\dots & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial u_1} & , \dots\dots , & \frac{\partial g_r}{\partial u_m} \end{pmatrix}_{x_e,u_e} \tag{3.74}$$

3.16.6 <u>דוגמא: המשך דוגמת החללית</u>

אם וקטור היציאה y מוגדר למשל על ידי:

$$y = \begin{pmatrix} r\dot{\theta} \\ r\dot{\theta}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2x_3 \\ x_1x_3^2 \end{pmatrix} = g(x)$$

נקבל מ-(3.74) :

$$C_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_3^2 & 0 & 2x_1x_3 \end{pmatrix}_{x_e} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 & 0 \\ \omega_0^2 & 0 & 2r_0\omega_0 \end{pmatrix}$$

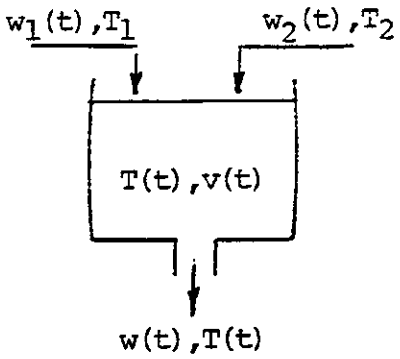
ו-

$$D_{2\times 2} = 0$$

או:

$$\delta y = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 & 0 \\ \omega_0^2 & 0 & 2r_0\omega_0 \end{pmatrix}\delta x$$

3.16.7 <u>דוגמה</u>



למיכל מוזרמים בו זמנית שני נוזלים בספיקות נפחיות משתנות בזמן $w_1(t)$ ו-$w_2(t)$. שני נוזלים אלה מוחזקים בטמפרטורות קבועות T_1 ו-T_2 בהתאמה. הנוזל עוזב את המיכל בספיקה $w(t)$ וטמפרטורה $T(t)$. הנוזל במיכל מעורבב היטב כך שניתן להניח כי טמפטורות הנוזל היוצא שווה לטמפרטורת הנוזל במיכל. המיכל הינו בעל חתך מלבני אחיד ושטח החתך הינו S. נפח הנוזל במיכל הוא $v(t)$ והספיקה $w(t)$ היוצאת מהמיכל תלויה בנפח הנ"ל לפי:

$$w(t) = K\left[\frac{v(t)}{S}\right]^{1/3}$$

א. נניח שהצפיפות והחום הסגולי של הזרמים הנכנסים והנוזל במיכל שוים וקבועים, ונרשום מאזני מסה וחם.

מאזן מסה:

$$w_1 + w_2 - w = \frac{dv}{dt}$$

מאזן חום:

$$w_1\rho CT_1 + w_2\rho CT_2 - w\rho CT = \rho C\,\frac{d}{dt}(vT)$$

כאשר C , ρ הינם הצפיפות והחום הסגולי בהתאמה.

$$\frac{dv}{dt} = w_1 + w_2 - \frac{K}{S^{1/3}}\,v^{1/3}$$

$$\frac{d}{dt}\,(vT) = v\,\frac{dT}{dt} + T\,\frac{dv}{dt} = w_1T_1 + w_2T_2 - wT$$

חלוץ $\dot{v}$ מהמשואה הראשונה והצבתו בשניה מביאה ל:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{w_1T_1}{v} + \frac{w_2T_2}{v} - \frac{wT}{v} - \frac{T}{v}\frac{dv}{dt} =$$

$$= \frac{w_1T_1}{v} + \frac{w_2T_2}{v} - \frac{wT}{v} - \frac{T}{v}(w_1 + w_2 - w) =$$

$$= \frac{w_1(T_1 - T)}{v} + \frac{w_2(T_2 - T)}{v}$$

נבחר:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} v \\ T \end{bmatrix}$$

ו-

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

ובאמצעות x ו-u נקבל:

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{bmatrix} -K(x_1/S)^{1/3} + u_1 + u_2 \\ \frac{u_1(T_1 - x_2)}{x_1} + \frac{u_2(T_2 - x_2)}{x_1} \end{bmatrix}$$

ב) נתון כי במשך זמן רב היו הספיקות w_1, w_2 קבועות. מהם ערכי v_e, T_e בשווי משקל, כאשר נתונים הערכים המספריים הבאים ביחידות מתאימות:

$$w_{1,e} = 0.02\,;\quad w_{2,e} = 0.04\,;\quad T_1 = 10\,;\quad T_2 = 70\,;\quad S = 1\,;\quad K = 0.03$$

הצבה תתן:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0.06 - 0.03x_1^{1/3} \\ \frac{0.02(10 - x_2)}{x_1} + \frac{0.04(70 - x_2)}{x_1} \end{bmatrix}$$

בהנחה שהמערכת מגיעה לשווי-משקל אזי $\dot{x}_e = 0$. נקבל לכן,

$$(x_1)_e^{1/3} = \frac{0.06}{0.03} = 2$$

$$v_e = (x_1)_e = 8$$

$$0.02(10 - x_{2e}) + 0.04(70 - x_{2e}) = 0$$

$$(x_2)_e = T_e = \frac{3}{0.06} = 50$$

ג) יש לבצע ליניאריזציה של משוואות המצב סביב נקודת שווי המשקל (המצב המתמיד) ולמצא את המטריצות A , B של משוואות המצב הליניאריות המתארות את המערכת באזור קרוב לנקודת שווי המשקל.

מתוך משוואות המצב הלא ליניאריות נקבל:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -(0.03) \cdot \frac{1}{3} x_1^{-2/3}\Big|_e = -0.01 \cdot 8^{-2/3} = -0.0025$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{x_1^2}\left[0.02(10 - x_2) + 0.04(70 - x_2)\right]_e = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \left[\frac{-0.02 - 0.04}{x_1}\right]_e = -\frac{0.06}{8} = -0.0075$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} = \frac{\partial f_1}{\partial u_2} = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u_1} = \left[\frac{10 - x_2}{x_1}\right]_e = \frac{10 - 50}{8} = -5$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u_2} = \left[\frac{70 - x_2}{x_1}\right]_e = \frac{70 - 50}{8} = 2.5$$

משוואות המצב הליניאריות יהיו לכן:

$$(\dot{\delta x}) = A\delta x + B\delta u$$

כאשר:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0025 & 0 \\ 0 & -0.0075 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

δx ו-δu הן הסטיות ממצב שווי המשקל:

$$\delta x = x - x_e = \begin{bmatrix} x_1 - 8 \\ x_2 - 50 \end{bmatrix}$$

$$\delta u = u - u_e = \begin{bmatrix} u_1 - 0.02 \\ u_2 - 0.04 \end{bmatrix}$$

ד) נתון $y \triangleq \begin{pmatrix} h \\ T \end{pmatrix}$ כאשר h היגו גובה הנוזל במיכל.

נמצא h_e - הגובה במצב מתמיד.

היות ו-

$$h = \frac{v}{S} = v \qquad (S = 1)$$

אזי:

$$h_e = \frac{v_e}{S} = 8$$

ומכאן

$$\delta y_1 = h - h_e = v - 8 = x_1 - 8 = \delta x_1$$

$$\delta y_2 = T - T_e = x_2 - (x_2)_e = \delta x_2$$

ולכן

$$\delta y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta x$$

3.16.8 <u>מערכות בדידות</u>

בדומה למערכות רציפות תתוארנה מערכות בדידות במרחב המצב כב-(3.33)

$$x_{i+1} = f(x_i, u_i, i)$$

$$y_i = g(x_i, u_i, i) \qquad (3.33)$$

ובמקרה הסטציונרי על ידי:

$$x_{i+1} = f(x_i, u_i)$$

$$y_i = g(x_i, u_i) \qquad (3.75)$$

נקודות שווי משקל, x_e, של (3.75) מוגדרות על ידי:

$$x_e = f(x_e, u_e) \qquad (3.76)$$

הליניאריזציה של (3.75) סביב x_e מתבצעת באותו אופן ובאותם תנאים כמו במערכות רציפות. הווה אומר שהמערכת הליניארית המתקבלת נתונה על ידי:

$$(\delta x)_{i+1} = A(\delta x)_i + B(\delta u)_i$$

$$(\delta y)_i = C(\delta x)_i + D(\delta u)_i \qquad (3.77)$$

כאשר:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_e, u_e} \quad ; \qquad B = \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{x_e, u_e}$$

$$C = \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{x_e, u_e} \quad ; \qquad D = \frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{x_e, u_e}$$

$$\delta x = x - x_e \quad ; \qquad \delta u = u - u_e \quad ; \qquad \delta y = y - y_e \qquad (3.78)$$

3.16.9 <u>דוגמה</u>

נתונה המערכת הבדידה:

$$y_{k+2} + y_{k+1}^2 + y_k^2 = u_k$$

על ידי הגדרת משתני המצב הבאים:

$$x_1(k) = y(k)$$

$$x_2(k) = y(k+1)$$

נקבל:

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} x_2(k) \\ -x_1^2(k) - x_2^2(k) + u(k) \end{pmatrix} = f(x(k), u(k))$$

$$y(k) = (1 \quad 0)\, x(k)$$

כאשר:

$$x \triangleq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

נמצא את נקודות שווי המשקל x_e עבור $u_e = 1$:

$$x_e = f(x_e, u_e) = \begin{pmatrix} x_{2,e} \\ -x_{1,e}^2 - x_{2,e}^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,e} \\ x_{2,e} \end{pmatrix}$$

לכן:

$$x_{2,e} = x_{1,e} \triangleq \bar{x}$$

ו-

$$\bar{x} = -2\bar{x}^2 + 1$$

או:

$$2\bar{x}^2 + \bar{x} - 1 = 0$$

ומכאן:

$$\bar{x}_a = -1 \qquad \bar{x}_b = 1/2$$

לכן למערכת שתי נקודות שווי משקל:

$$(x_e)_a = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad (x_e)_b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

נבצע ליניאריזציה של המערכת סביב נקודות שווי המשקל:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2x_{1,e} & -2x_{2,e} \end{pmatrix} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ולכן בנקודה a למשל נקבל את המערכת הליניארית:

$$(\delta x)_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} (\delta x)_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta u_k$$

$$(\delta y)_k = (1 \quad 0)\,(\delta x)_k$$

כאשר:

$$\delta x = x - x_e = x - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \delta u = u - 1$$

$$\delta y = y - y_e = y - (-1)$$

פרק 4 : פולינומים ופונקציות של מטריצות

4.1

פתרון משואות המצב (שהוצגו בפרק הקודם) כרוך בחישוב פונקציות של מטריצות. נציג בפרק זה בקיצור נמרץ דרכים לחשוב פונקציות אלו . החומר המובא כאן כולל רק את עקרי הדברים ואין הוא בא אלא לצורך רענון.

4.1.1 <u>חזקות של מטריצה</u>

אם A מטריצה רבועית אזי נגדיר:

$$\underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k} \triangleq A^k$$

ו- $A^0 = I$

ומכאן $A^k \cdot A^m = A^{k+m}$

$(A^k)^m = A^{km}$

ואם $\det A \neq 0$ אזי $(A^{-1})^m = A^{-m}$

4.1.2 <u>פולינום במטריצה A</u>

נתון פולינום $N(\lambda)$ במשתנה הסקלרי λ:

$$N(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} c_i \lambda^i$$

אם בפולינום הנ"ל נחליף את λ במטריצה הרבועית A נקבל פולינום ב-A:

$$N(A) = \sum_{i=0}^{n} c_i A^i \tag{4.1}$$

4.1.3 <u>פולינום אינסופי במטריצה A.</u>

עבור $A_{n\times n}$ נגדיר:

$$S(A) = a_0 I_n + a_1 A + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \tag{4.2}$$

ניתן להראות שהפולינום האינסופי (4.2) מתכנס אם כל הטורים הסקלריים $S(\lambda_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ מתכנסים עבור כל הע"ע λ_i של A.

4.14 <u>מטריצת האקספוננט - e^A</u>

A - מטריצה רבועית (nxn).

e^A מוגדרת על ידי הטור האינסופי:

$$e^A \triangleq I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} A^i / i! \tag{4.3}$$

מההגדרה הנ"ל נובע :

$$e^0 = I \tag{4.3a}$$

אם $AB = BA$ (A ו-B קומוטטיביות) אזי:

$$e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A = e^{A+B} \tag{4.4}$$

במקרה הכללי:

$$e^A \cdot e^B \neq e^B \cdot e^A$$

אם ב-(4.4) נציב $B = -A$ ונשתמש ב-(4.3a) נקבל:

$$e^A \cdot e^{-A} = e^0 = I$$

מכאן:

$$(e^A)^{-1} = e^{-A} \tag{4.5}$$

מהנ"ל נובע ש:

$$\det(e^A) \neq 0 \tag{4.6}$$

כלומר מטריצת האקספוננט של כל מטריצה הינה מטריצה לא סינגולרית.

4.15 <u>אם</u> $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ <u>ו-$N(\Lambda)$ נתון על ידי:</u>

$$N(\Lambda) = \sum_{i=0}^{n} c_i \Lambda^i = c_0 I + c_1 \Lambda + \ldots c_n \Lambda^n$$

קל להווכח כי:

$$N(\Lambda) = \mathrm{diag}(N(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} N(\lambda_1) & & O \\ & N(\lambda_2) & \\ O & & N(\lambda_n) \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

4.1.6 <u>משפט</u>: יהא $N(A)$ פולינום במטריצה $A_{n\times n}$:

$$N(A) = \sum_{i=0}^{m} c_i A^i \tag{4.1}$$

הנח כי ניתן ללכסן את $A_{n\times n}$ וכי M הינה המטריצה המודלית של A, אזי:

$$N(A) = MN(\Lambda)M^{-1} \tag{4.8}$$

<u>הוכחה</u>:

בפרק 3 משואה (3.41) ראינו כי $A = M\Lambda M^{-1}$.

מכאן:

$$A^2 = (M\Lambda M^{-1})(M\Lambda M^{-1}) = M\Lambda^2 M^{-1} \tag{4.9}$$

ועבור k שלם:

$$A^k = M\Lambda^k M^{-1} \tag{4.10}$$

נציב (4.10) ב-(4.1):

$$N(A) = \sum_{i=0}^{m} c_i M\Lambda^i M^{-1} = M(\sum_{i=0}^{m} c_i \Lambda^i)M^{-1} = MN(\Lambda)M^{-1}$$

ם

<u>הערה</u>: ניתן להרחיב המשפט הנ"ל למקרה בו A אינה נתנת ללכסון (אם A אינה פשוטה).

כאשר: $A = MJM^{-1}$

ו-J היא תבנית גורדן אזי ניתן להראות כי:

$$N(A) = \sum_{i=0}^{m} c_i A^i = MN(J)M^{-1}$$

אם למשל:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix}$$

J_i הם הבלוקים של גורדן.

אזי $N(J)$ נתון על ידי:

$$N(J) = \begin{pmatrix} N(J_1) & & 0 \\ & N(J_2) & \\ 0 & & N(J_k) \end{pmatrix}$$

<u>מסקנה</u>: מהמשפט נובע שאם λ_i הוא ע"ע של A אזי $N(\lambda_i)$ הינו ע"ע של $N(A)$.

4.1.7 <u>משפט קילי-המילטון (Caley-Hamilton)</u>

נסמן ב-$\Delta(\lambda)$ את הפולינום האופיני של A דהייגו:

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

ו-$\Delta(\lambda_i) = 0$.

<u>משפט</u>: $\Delta(A) = 0$ (4.11)

כלומר: המטריצה A מקימת את המשואה האפינית של עצמה.

<u>הוכחה</u>: נוכיח המקרה בו A מטריצה פשוטה. נחליף ב-(4.8) את N(A) ב-$\Delta(A)$ ונקבל:

$$\Delta(A) = M\begin{bmatrix} \Delta(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \Delta(\lambda_n) \end{bmatrix} M^{-1}$$

והיות ו- $\Delta(\lambda_i)=0$ $(i=1,\dots,n)$ נקבל את (4.11).

ם

<u>הערה</u>: ניתן להראות ש-(4.11) נכונה גם במקרה הכללי יותר בו A אינה פשוטה.

4.1.8 <u>מסקנה מהמשפט</u>: כל פולינום N(A) מסדר גבוה מ-n-1 ב-A (כאשר n סדר המטריצה הרבועית A) ניתן להביע באמצעות פולינום g(A) ב-A מסדר n-1 לכל היותר.

4.1.9 <u>דוגמא</u>: נתון: $N(A) = A^4 + A^3 + A^2 + A + I$

כאשר:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

ניתן לבטא את N(A) על ידי פולינום g(A) מסדר 1 (= 2-1 = n-1) כדלהלן:

המשואה האופינית של A: $\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

לפי (4.11): $\Delta(A) = A^2 + 3A + 2I_2 = 0$

או: $A^2 = -3A - 2I$

לכן: $A^4 = A^2 \cdot A^2 = -15A-14I$

ו- $A^3 = A \cdot A^2 = 7A+6I$

מכאן : $N(A) = g(A) = (-15A-14I) + (7A+6I)+(-3A-2I)+A+I =$

$$= -10A - 9I = \begin{pmatrix} -9 & -10 \\ 20 & 21 \end{pmatrix}$$

4.1.10 <u>דוגמא</u>: חשב A^{-1} עבור הדוגמא הקודמת:

נכפול את A^2 $(A^2 = -3A-2I)$ ב-A^{-1} ונקבל: $A = -3I - 2A^{-1}$

ומכאן:

$$A^{-1} = -\tfrac{1}{2}(A + 3I) = \begin{pmatrix} -3/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.2 <u>חשוב פונקציה (או פולינום) של מטריצה</u>

נתון פולינום כלשהוא $f(A)$ במטריצה הרבועית $A_{n\times n}$. ל-A m ע"ע נפרדים λ_i. הע"ע λ_i חוזר n_i פעמים.

לכן $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$. נציג כאן שתי שיטות לחשוב $f(A)$.

I. <u>שיטת קילי - המילטון</u>

4.2.1 <u>משפט</u>: אם $\Delta(\lambda)$ הינה המשוואה האפינית של A הנתונה על ידי:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{n_i} \tag{4.12}$$

ואם $f(\lambda)$ ו-$g(\lambda)$ הם פולינומים כלשהם ב-λ המקיימים:

$$f^{(k)}(\lambda_i) = g^{(k)}(\lambda_i) \qquad i = 1, 2, \dots m$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n_i - 1 \tag{4.13}$$

כאשר:

$$f^{(k)}(\lambda_i) \triangleq \frac{d^k}{d\lambda^k} f(\lambda)\Big|_{\lambda = \lambda_i}$$

אזי:

$$f(A) = g(A) \tag{4.14}$$

4.2.2 <u>מסקנה</u>: מטרתנו לחשב את $f(A)$. לפי 4.1.8 (מסקנת משפט קילי-המילטון) $f(A) = g(A)$ כאשר $g(A)$ פולינום מסדר n-1 ב-A. (4.13) הם n שיויתים שעל $g(\lambda)$ לקיים. אנו יודעים שניתן תמיד לבנות פולינום $g(\lambda)$ מסדר n-1 אם נתונים n מספרים שעל פולינום זה לתת בערכים נתונים של λ. לכן אם A מטריצה מסדר n אזי עבור כל פולינום $f(\lambda)$ נוכל לבנות פולינום $g(\lambda)$ מסדר n-1 הנתון על ידי:

$$g(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \lambda^i = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda \ldots + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} \tag{4.15}$$

המקיים את n השויונים שב-(4.13) ולפי המשפט:

$$f(A) = g(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^i \tag{4.16}$$

4.2.3 <u>הערה</u>: את המשפט הנ"ל ניתן להרחיב למקרה בו $f(\lambda)$ הוא פונקציה ולאו דוקא פולינום. לכן כל פונקציה במטריצה A ניתן לבטא על ידי פולינום $g(A)$ מסדר n-1 במטריצה A לפי (4.16) כאשר $g(\lambda)$ מקיים את (4.13).

4.2.4 <u>סכום שלבי חישוב הפונקציה f(A) בשיטת קילי-המילטון.</u>

נתונה המטריצה $A_{n\times n}$ ונתונה הפונקציה (או הפולינום) $f(A)$.

א. מצא המשוואה האופינית של A :

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$$

וקבע את הע"ע-ים של A.

ב. הנח:

$$g(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \lambda^i$$

כאשר α_i קבועים לא ידועים.

ג. למציאת α_i $(i = 0,1,\ldots,n-1)$ השתמש ב-n השויונים שב-(4.13):

$$f^{(k)}(\lambda_i) = g^{(k)}(\lambda_i) \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots n_i - 1 \tag{4.13}$$

(הנגזרות שב-(4.13) הן ביחס ל-λ.)

ד. הצב ה-α_i ב-(4.16).

4.2.5 <u>דוגמאות</u>:

1) נתונה המטריצה A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

חשב: $f(A) = e^{At}$

א.

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)(\lambda + 2) \quad ; \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

ב. $n = 2$ לכן:

$$g(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$$
$$f(\lambda) = e^{\lambda t}$$

ג. מ-(4.13) נקבל:

$$f(-1) = g(-1) \; ; \quad e^{-t} = \alpha_0 - \alpha_1$$

$$f(-2) = g(-2) \; ; \quad e^{-2t} = \alpha_0 - 2\alpha_1$$

פתרון שתי המשואות הנ"ל עבור α_0 ו-α_1 נותן:

$$\alpha_0 = 2e^{-t} - e^{-2t} \; ; \quad \alpha_1 = e^{-t} - e^{-2t}$$

ד.

$$e^{At} = g(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -2\alpha_1 & -3\alpha_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ -2\alpha_1 & \alpha_0 - 3\alpha_1 \end{pmatrix}$$

הצבת α_0 ו-α_1 בנ"ל:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2(e^{-t} - e^{-2t}) & -(e^{-t} - 2e^{-2t}) \end{pmatrix}$$

2) עבור A שבדוגמה 1 חשב $f(A)=A^k$.

א. $\lambda_1 = -1 \; ; \; \lambda_2 = -2$.

ב.

$$g(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$$
$$f(\lambda) = \lambda^k$$

ג.

$$f(-1)=g(-1)\ ;\quad (-1)^k=\alpha_0-\alpha_1$$

$$f(-2)=g(-2)\ ;\quad (-2)^k=\alpha_0-2\alpha_1$$

$$\alpha_0=2(-1)^k-(-2)^k\ ;\quad \alpha_1=(-1)^k-(-2)^k$$

ד.

$$A^k=g(A)=\begin{pmatrix}\alpha_0 & \alpha_1\\ -2\alpha_1 & \alpha_0-3\alpha_1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2(-1)^k-(-2)^k & (-1)^k-(-2)^k\\ -2(-1)^k+2(-2)^k & -(-1)^k+2(-2)^k\end{pmatrix}$$

3) דוגמה עם שרשים חוזרים.

נתונה המטריצה A:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

חשב: $f(A)=e^{At}$

א. היות ו-A בתבנית גיורדן אזי $\lambda_1=1\ (n_1=2)\ ;\ \lambda_2=2$

ב. $n=3$, לכן

$$g(\lambda)=\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2$$

ג. $(f(\lambda)=e^{\lambda t})$

$$f(1)=g(1)\qquad ;\qquad e^t=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2$$

$$f'(\lambda)\Big|_{\lambda=1}=g'(\lambda)\Big|_{\lambda=1}\ ;\quad te^{\lambda t}\Big|_{\lambda=\lambda_1}=(\alpha_1+2\alpha_2\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_1}=\quad te^t=\alpha_1+2\alpha_2$$

$$f(2)=g(2)\qquad ;\qquad e^{2t}=\alpha_0+2\alpha_1+4\alpha_2$$

במקרה זה לא כדאי לפתור את שלושת המשוואות הנ"ל עבור α_i .

ד.

$$e^{At} = g(A) = \alpha_0 I_3 + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 & 2\alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 4\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + 2\alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

II. <u>שיטת סילוסטר (Sylvester)</u>

בשיטה זו נציג רק את דרך חשוב $f(A)$. כמקדם נתונה $A_{n\times n}$ ולה m ע"ע נפרדים λ_i. n_i- מספר חזרות λ_i.

4.2.6 חשוב $f(A)$ כאשר ל-A n ע"ע נפרדים.

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) Z(\lambda_i) \tag{4.17}$$

כאשר:

$$Z(\lambda_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (A - \lambda_j I) / \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j) \right) \tag{4.18}$$

4.2.7 חשוב $f(A)$ כאשר ל-A ע"ע חוזרים.

$$f(A) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{n_i - 1)!} \left\{ \frac{d^{n_i - 1}}{d\lambda^{n_i - 1}} \left[\frac{f(\lambda) Adj(\lambda I - A)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} (\lambda - \lambda_j)} \right] \right\}_{\lambda = \lambda_i} \right. \tag{4.19}$$

4.2.8 <u>דוגמאות</u>

1) שרשים נפרדים: חשב $f(A)=e^{At}$ עבור A שבדוגמה 1 (סעיף 4.2.5). $\lambda_1=-1,\ \ \lambda_2=-2$.

$$f(A)=f(\lambda_1)Z(\lambda_1)+f(\lambda_2)Z(\lambda_2)$$

$$Z(\lambda_1)=\frac{A-\lambda_2 I_2}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}}{-1-(-2)}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$

$$Z(\lambda_2)=\frac{A-\lambda_1 I_2}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}{-2-(-1)}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$f(A)=e^{-t}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}+e^{-2t}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{pmatrix}$$

2) שרשים חוזרים

נמצא e^{At} עבור A שבדוגמה 3 בסעיף 4.2.5.

בדוגמה זו $\lambda_1=1\ ,\ n_1=2\ ;\ \ \lambda_2=2\ \ n_2=1\ ;\ \ \ m=2$

$$\mathrm{Adj}(\lambda I-A)=\begin{pmatrix}(\lambda-1)(\lambda-2) & \lambda-2 & 0\\ 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2\end{pmatrix}$$

$$f(\lambda)=e^{\lambda t}$$

מ-(4.19) נקבל לכן:

$$f(A)=\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{e^{\lambda t}\mathrm{Adj}(\lambda I-A)}{\lambda-\lambda_2}\right]_{\lambda=\lambda_1}+\frac{e^{\lambda_2 t}\mathrm{Adj}(\lambda_2 I-A)}{\lambda_2-\lambda_1}$$

$$\frac{e^{\lambda t}\mathrm{Adj}(\lambda_2 I - A)}{\lambda - 2} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t}(\lambda - 1) & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t}(\lambda - 1) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^{\lambda t}(\lambda - 1)^2}{\lambda - 2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda t}(\lambda - 1)\Big|_{\lambda = \lambda_1} = [te^{\lambda t}(\lambda - 1) + e^{\lambda t}]_{\lambda = \lambda_1} = e^t$$

$$\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda t}\Big|_{\lambda = \lambda_1} = t\,e^{\lambda t}\Big|_{\lambda = \lambda_1} = t\,e^t$$

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{e^{\lambda t}(\lambda - 1)^2}{\lambda - 2}\Big|_{\lambda = \lambda_1} = 0$$

לכן:

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{e^{\lambda t}\mathrm{Adj}(\lambda I - A)}{\lambda - 2}\Big|_{\lambda = \lambda_1} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{e^{\lambda_2 t}\mathrm{Adj}(\lambda_2 I - A)}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{e^{2t}}{2 - 1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ומכאן:

$$f(A) = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

התוצאה זהה כמובן לזו שקבלנו באמצעות שיטת קיילי-המילטון.

4.3 המטריצה e^{At}

בסעיף 4.1.4 הגדרנו את מטריצת האקספוננט ומנינו מספר מתכונותיה. עקב חשיבותה של מטריצת האקספוננט נחזור על תכונותיה ונוסיף תכונות נוספות.

4.3.1 הגדרה:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots \dots \qquad (4.20)$$

4.3.2 אם $A=0$ אזי מ-(4.20) נובע כי:

$$e^0 = I \tag{4.21}$$

4.3.3 היות ו-At ו-$(-At)$ קומוטטיביות הרי:

$$e^{At} \cdot e^{-At} = e^0 = I \tag{4.22}$$

ומכאן:

$$e^{-At} = (e^{At})^{-1} \tag{4.23}$$

4.3.4 מהנייל נובע כי:

$$\det(e^{At}) \neq 0 \tag{4.24}$$

4.3.5

$$Ae^{At} = e^{At}A \tag{4.25}$$

את (4.25) קל להוכיח מהגדרת e^{At} שב-(4.20)

<u>הערה</u>: תכונה (4.25) היא מקרה פרטי של תכונה כללית יותר של פונקציות של <u>אותה</u> מטריצה: אם $f(A)$ ו-$g(A)$ הן פונקציות של A הרי:

$$f(A)\, g(A) = g(A)\, f(A) \tag{4.26}$$

4.3.6

$$\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At} = e^{At} A \tag{4.27}$$

כדי להוכיח את (4.27) נגזור את (4.20) לפי t:

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A + A^2 t + \frac{A^3 t^2}{2!} + \ldots = A(I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \ldots) = Ae^{At}$$

4.3.7

$$e^{A(t_1 + t_2)} = e^{At_1} \cdot e^{At_2} \tag{4.28}$$

4.3.8 אם נבצע אינטגרציה של (4.20):

$$\int_0^t e^{A\tau}d\tau = \int_0^t (I + A\tau + \frac{1}{2!}A^2\tau^2 + \ldots)d\tau$$

נקבל:

$$\int_0^t e^{A\tau}d\tau = It + \frac{At^2}{2!} + \frac{A^2t^3}{3!} + \ldots$$

לכן:

$$A\int_0^t e^{A\tau}d\tau = e^{At} - I \tag{4.29}$$

ובאם A אינה סינגולרית

$$\int_0^t e^{A\tau}d\tau = (e^{At} - I)A^{-1} \tag{4.30}$$

פרק 5 : פתרון משואות המצב בציר הזמן

א. מערכות רציפות

5.1 מערכת סטציונרית חפשית (פתרון הומוגני)

נתונה המערכת הסטציונרית החפשית:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad x(t) \in R^n \tag{5.1a}$$

עם תנאי ההתחלה:

$$x(t_o) \tag{5.1b}$$

5.1.1 פתרון (5.1) נתון בדומה למערכת סקלרית על ידי:

$$x(t) = e^{A(t-t_o)}x(t_o) \tag{5.2}$$

5.1.2 ניתן לדאא ש-(5.2) הוא פתרון של (5.1) על ידי גזירת (5.2) לפי t:

$$\dot{x}(t) = Ae^{A(t-t_o)}x(t_o) = Ax(t)$$

5.1.3 כדי להראות ש-(5.2) הינו פתרון יחידי נניח של -(5.1) שני פתרונות שונים $x_1(t)$ ו-$x_2(t)$. הפרשם $z = x_1 - x_2$ מקיים לכן:

$$\dot{z} = Az \qquad z(t_o) = x_1(t_o) - x_2(t_o) = 0 \tag{5.3}$$

אבל פתרון (5.3) הוא $z(t) = 0$.

5.1.4 היות ו-(5.2) אינו תלוי ב-t וב-t_o אלא בהפרש $t-t_o$ (תכונת הסטציונריות) ניתן לכן להזיז את ציר הזמן כך ש-$t_o = 0$. הפתרון בתנאים אלו יהיה:

$$x(t) = e^{At}x_o \tag{5.4}$$

כאשר:

$$x_o \stackrel{\Delta}{=} x(t=0)$$

5.1.5 מטריצת המעבר (Transition Matrix) - המטריצה e^{At} נקראת מטריצת המעבר של המערכת (5.1) שכן היא מתארת את תנועת קצה וקטור המצב $x(t)$ במרחב המצב.

5.1.6 לצורך קבלת הפתרון (5.4) או (5.2) יש לחשב את e^{At}. את e^{At} ניתן לחשב באחת מהדרכים הבאות:

1. בשיטת קילי-המילטון (סעיף 4.2.4)
2. בשיטת סילוסטר (סעיפים 4.2.6 - 4.2.7)
3. באמצעות התמרת לפלס (ראה פרק 6)
4. על ידי לכסונה של A (או הבאתה לתבנית ג'ורדן) ושמוש בקשר:

$$e^{At} = \overline{M}e^{Jt}\overline{M}^{-1} \tag{5.5}$$

5.2 מערכת סטציונרית מאולצת (פתרון כללי)

5.2.1 נתונה המערכת:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{5.6}$$

ונתונים $x(t_o)$, $t \geq t_o$. $u(t)$.

פתרון (5.6) נתון על ידי:

$$x(t) = e^{A(t-t_o)}x(t_o) + \int_{t_o}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{5.7}$$

5.2.2 היות וגם כאן תלוי הפתרון בהפרש $t-t_o$ נזיז את ציר הזמן כך ש-$t_o = 0$. הפתרון יהיה נתון על ידי:

$$x(t) = e^{At}x_o + \int_{0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{5.8}$$

5.2.3 הפתרון (5.8) (וכמובן גם (5.7)) מקיים את המשואה (5.6). זאת ניתן לבדוק על ידי גזירת (5.8) לפי t:

נכתוב (5.8) בצורה:

$$x(t) = e^{At}x_o + e^{At}\int_{0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \tag{5.9}$$

נגזור עתה את (5.9) לפי t:

$$\dot{x}(t) = Ae^{At}x_0 + Ae^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau + e^{At}(e^{-At}Bu(t))\frac{d}{dt}(t)$$

$$= A(e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau) + Bu(t)$$

$$= Ax(t) + Bu(t)$$

הערה: את האיבר הימני ב-(5.9) גזרנו לפי נגזרת של מכפלה ובגזירת האינטגרל השתמשנו בכלל לייבניץ:

$$\frac{d}{dw}\left[\int_{v_1(w)}^{v_2(w)} f(x)dx\right] = f(v_2)\frac{dv_2}{dw} - f(v_1)\frac{dv_1}{dw}$$

5.2.4 ניתן להראות ש-(5.8) הוא פתרון יחיד של (5.6).

5.2.5 הפתרון (5.8) מהווה סופרפוזיציה של שני פתרונות:

האחד - עבור המערכת החופשית ($u(t) = 0$) הנקרא <u>zero input response</u> .

השני - עבור המערכת המאולצת עם תנאי התחלה 0 ($x_0 = 0$) הנקרא <u>zero state response</u>.

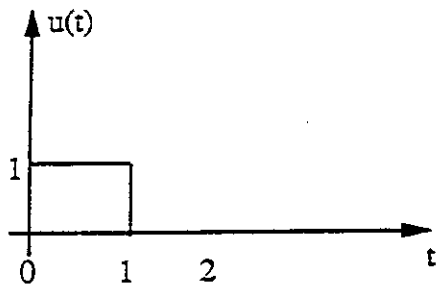
5.2.6 אם מציבים את הפתרון (5.8) במשואת היציאה נקבל את הפתרון עבור וקטור היציאה :

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \qquad (5.10)$$

5.2.7 דוגמה: נתונה מערכת SISO באמצעות המשואה הדיפרנציאלית $\ddot{y} = \dot{u} + u$.

א. ממש המערכת בצורה המלווה.

ב. מצא $x(t)$ ו-$y(t)$ עבור $t \geq 0$ אם נתון $x(0) = 0$ והכניסה $u(t)$ נתונה בציור.



פתרון:

פתרון:

א. ממרש המערכת בצורה המלווה:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

ב. נחשב ותחילה את e^{At}. את e^{At} ניתן כמובן לחשב לפי כל אחת מהדרכים שנלמדו בפרק 4.

במקרה זה היות ו-A היא בתבנית-גורדן ידוע כי $e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו- $e^{At}B = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$.

היות ו-$x(0) = 0$ יהיה פתרון משוואות המצב (לפי 5.9):

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

כיון ש-$u(t)$ אינה רציפה ב-t נציג שתי דרכים לפתרון.

<u>דרך א</u>: כאן נפתור תחילה עבור $0 \le t \le 1$ והיות ו-$u(t)=0$ עבור $t > 1$, נמצא את $x(1)$ מהנ"ל והמשך הפתרון יהיה כפתרון מערכת חפשית החל מהזמן $t=1$:

עבור $0 < t \le 1$ נקבל:

$$\underset{0 \le t \le 1}{x(t)} = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) = \int_0^t \begin{pmatrix} t-\tau \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1 \cdot d\tau = \begin{pmatrix} t\tau - \frac{\tau^2}{2} \\ \tau \end{pmatrix} \Bigg|_0^t = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ t \end{pmatrix}$$

היות ופתרון זה תופס עבור $0 < t \le 1$ נחשב את $x(1)$ על ידי הצבת $t=1$ ב-$x(t)$:

$$x(1) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$u(t) = 0$ עבור $t > 1$ לכן $x(t)$ עבור $t > 1$ יהיה נתון על ידי (ראה (5.2))

$$\underset{t \ge 1}{x(t)} = e^{A(t-1)} x(1) = \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן סה"כ הפתרון:

$$x(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ t \end{pmatrix} & 0 \le t \le 1 \\ \begin{pmatrix} t - \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} & t \ge 1 \end{cases}$$

הצבת $x(t)$ במשוואת היציאה תביא ל:

$$y(t)=\begin{cases}\frac{t^2}{2}+t & 0\le t\le 1\\ t+\frac{1}{2} & t\ge 1\end{cases}$$

<u>דרך ב'</u>: את חלקו הראשון של הפתרון עבור $0\le t\le 1$ נבצע כבדרך א'. את הפתרון עבור $t\ge 1$ נמצא כדלהלן:

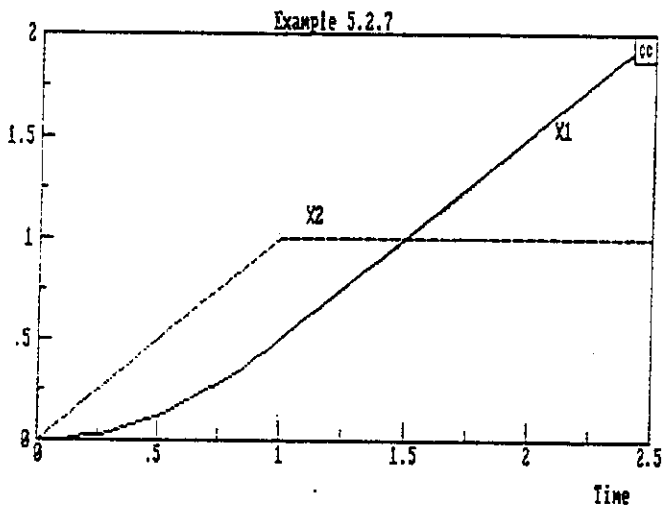
$$\underset{t\ge 1}{x(t)}=\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau=\int_0^1 e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau+\cancel{\int_1^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}$$

$$=\begin{pmatrix}t\tau-\frac{\tau^2}{2}\\ \tau\end{pmatrix}\Bigg|_0^1=\begin{pmatrix}t-\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$$

וזהו כמובן אותו הפתרון כבדרך א'.

ההבדל בין שתי הדרכים הנ"ל הוא בכך שבדרך ב' לקחנו את זמן ההתחלה t_o בשני השלבים כ-$t_o=0$ והשתמשנו בפתרון המאולץ (שכן $x_o=0$) - ראה סעיף 5.2.5. בדרך א' השתמשנו בתחום $0\le t\le 1$ בפתרון המאולץ עם $t_o=0$ ו-$x_o=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ובתחום $t\ge 1$ השתמשנו בפתרון החופשי עם $t_o=1$ ו-$x(t_o=1)=\begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}$.

התאור הגרפי של $x(t)$ כפונקציה של t נתון בציור:



5.3 אופני תנועה (מודים - modes) של מערכת

5.3.1 נתונה המערכת (5.1). נניח לצורך הפשטות של-A ע״עים ($\lambda_i(A)$) נפרדים. M הינה המטריצה המודלית של A. נסמן

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} r^1 \\ r^2 \\ \vdots \\ r^n \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

($i = 1,\dots,n$) r^i הם הוקטורים העצמיים השמאליים של A.

אם נציב לפתרון (5.4) את (5.5) נקבל:

$$x(t) = Me^{\Lambda t}M^{-1}x_o = (v^1, v^2, \dots, v^n)\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r^1 \\ r^2 \\ \vdots \\ r^n \end{pmatrix} x_o$$

או:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} v^i < r^i, x_o >$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \, e^{\lambda_i t} v^i \tag{5.12}$$

כאשר :

$$\mu_i \stackrel{\Delta}{=} < r^i, x_o > \tag{5.13}$$

($i = 1,\dots,n$) μ_i הינם סקלרים לכן $\mu_i v^i$ הינם וקטורים בכוון v^i.

5.3.2 <u>**משקנה**</u> - תגובת המערכת החופשית לפי (5.12) מורכבת מתנועות לאורך הוקטורים העצמיים v^i של A .

5.3.3 <u>**הגדרה**</u>: תנועה לאורך ו״ע נקראת בשם <u>אופן תנועה או מד</u> (mode) של המערכת.

הביטוי $m_i(t) = e^{\lambda_i t} v^i$ הינו מד. כל אלמנט של הוקטור $m_i(t)$ משתנה באותה צורה כפונקציה של הזמן לפי $\mu_i \cdot e^{\lambda_i t}$ נקרא בשם <u>מידת הערור</u> של המד ה-i .

5.3.4 סיכום: כאשר למערכת ע"עים נפרדים ($\lambda_i \neq \lambda_j$) אזי:

א. למערכת n מודים.

ב. כל מוד מעורר בשעור $\mu_i = \langle r^i, x_o \rangle$. מידת הערור תלויה ב-x_o .

ג. ערור של מוד אחד אינו תלוי בערור המודים האחרים.

ד. אם וקטור תנאי ההתחלה x_o הינו בכוון הע"ע v^j , למשל, דהינו $x_o = \alpha v^j$ (α קבוע) יעורר רק

המוד ה-j ($m_j = v^j e^{\lambda_j t}$). מידת הערור תהיה $\mu_j = \alpha$ והפתרון יהיה:

$$x(t) = x_o e^{\lambda_j t} \tag{5.14}$$

הוכחה:

אם $x_o = \alpha v^j$ יהיה μ_j נתון על ידי:

$$\mu_j = \langle r^j, x_o \rangle = \langle r^j, \alpha v^j \rangle = \alpha \langle r^j, v^j \rangle = \alpha \tag{5.15}$$

והיות:

$$\mu_i = \langle r^i, x_o \rangle = \alpha \langle r^i, v^j \rangle = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n, \quad i \neq j) \tag{5.16}$$

נקבל מהצבת (5.15) ו-(5.16) ב-(5.12):

$$x(t) = \mu_j v^j e^{\lambda_j t} = \alpha v^j e^{\lambda_j t} = x_o e^{\lambda_j t}$$

ם

5.3.5 המוד ה-i , m_i, הקשור לע"ע λ_i יקרא <u>מוד מהיר</u> יחסית למוד ה-j , m_j, אם $|\lambda_i| > |\lambda_j|$.

5.3.6 הגדרה - <u>מסלול</u> (טריקטוריה) - מסלול שמתווה קצה וקטור המצב $x(t)$ במרחב המצב.

5.3.7 דוגמא: נתונה המערכת החופשית $\dot{x} = Ax$ עם $x_o = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix}$ ו- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$

$$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -4$$

ו-

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad v^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$r^1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad ; \quad r^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

מידות הערור μ_i תהייה לכן:

$$\mu_1 = \langle r^1, x_o \rangle = \frac{4}{3} x_{1,0} + \frac{1}{3} x_{2,0}$$

$$\mu_2 = \langle r^2, x_o \rangle = \frac{1}{3} x_{1,0} + \frac{1}{3} x_{2,0}$$

מכאן שהפתרון של המערכת יהיה:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{2} \mu_i e^{\lambda_i t} v^i = (\frac{4}{3} x_{1,0} + \frac{1}{3} x_{2,0}) e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} +$$

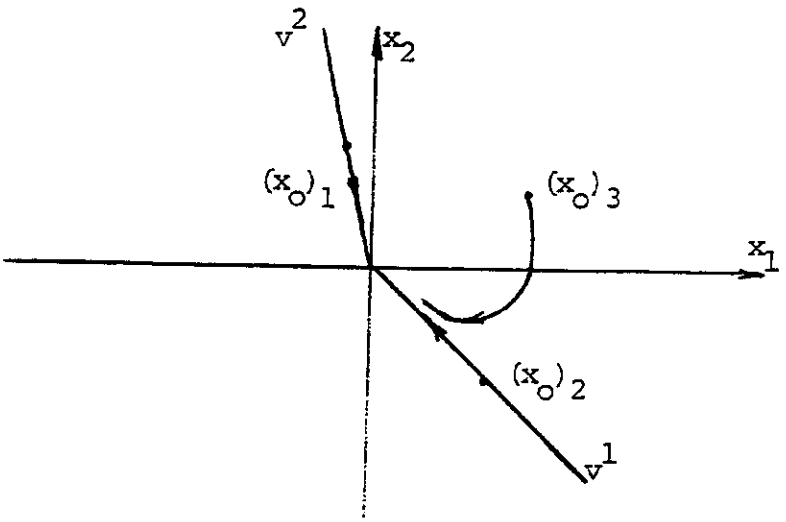
$$+ \frac{1}{3}(x_{1,0} + x_{2,0}) e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (5.15)$$

או בצורה מפורשת:

$$x_1(t) = (\frac{4}{3} x_{1,0} + \frac{1}{3} x_{2,0}) e^{-t} - \frac{1}{3}(x_{1,0} + x_{2,0}) e^{-4t}$$

$$x_2(t) = -(\frac{4}{3} x_{1,0} + \frac{1}{3} x_{2,0}) e^{-t} + \frac{4}{3}(x_{1,0} + x_{2,0}) e^{-4t}$$

מסלולי הפתרון בדוגמה זו משלושה תנאי התחלה שונים $(x_0)_1$, $(x_0)_2$, $(x_0)_3$ ו-$(x_0)_3$ מוצגים בציור 5.1.



ציור 5.1

$(x_o)_1$ בכוונו של v^2. אי לכך יעורר רק המוד $m_2 = v^2 e^{\lambda_2 t}$ ולפי (5.14) יהיה הפתרון נתון על ידי:

$$x(t) = (x_o)_1 e^{-4t}$$

$(x_o)_2$ בכוונו של v^1 לכן יעורר במקרה זה המוד m_1 והפתרון יהיה:

$$x(t) = (x_o)_2 e^{-t}$$

כאשר תנאי ההתחלה x_o אינם מונחים לא על v^1 ולא על v^2, כמו במקרה $(x_o)_3$, המסלול יהיה קומבינציה של שני המודים לפי (5.15). עבור t-ים קטנים יהיה כוון המסלול מקביל לכוון המוד המהיר (m_2 בדוגמה זו) ועבור t-ים גדולים יהיה כוונו מקביל לכוון המוד האיטי (m_1) - ראה ציור. זאת היות ועבור t-ים קטנים השפעת e^{-4t} גדולה יותר מאשר השפעת e^{-t} ולהיפך עבור זמנים t גדולים.

5.3.8 מודים במערכת עם ע"ע מדומים.

אם למערכת (5.1) ע"ע λ_1 הנתון על ידי $\lambda_1 = -\sigma + j\omega$ הרי עבור A ממשית יהיה λ_2 נתון על ידי $\lambda_2 = \lambda_1^* = -\sigma - j\omega$ הו"ע-ים המתאימים הם v^1 ו-v^2. v^1 ו-v^2 יקיימו: $v^2 = v^{1*}$.

אם נסמן: $v^1 = \alpha + j\beta$, יהיה v^2: $v^2 = \alpha - j\beta$.

בפרק 3.14 ראינו כי אם נבצע למערכת (5.1) טרנספורמציה סימילרית מ-x ל-$\bar{x}$ באמצעות:

$$T_m = (\alpha, \beta)$$

תתקבל המערכת המותמרת בצורה:

$$\dot{\bar{x}} = \Lambda_m \bar{x} \tag{5.16}$$

כאשר:

$$\Lambda_m = T_m^{-1} A T_m = \begin{pmatrix} -\sigma & \omega \\ -\omega & -\sigma \end{pmatrix}$$

פתרון (5.16) יתן:

$$\bar{x}(t) = e^{\Lambda_m t} x_o = e^{-\sigma t} \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} x_o \tag{5.17}$$

אם נסמן את שורות T_m^{-1} על ידי:

$$T_m^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

ונתמיר (5.17) חזרה ל-x נקבל:

$$x(t) = T_m e^{\Lambda_m t} T_m^{-1} x_o = e^{-\sigma t}(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} x_o \tag{5.18}$$

או:

$$x(t) = e^{-\sigma t}\{< \gamma, x_o >[(\cos \omega t)\alpha - (\sin \omega t)\beta] +$$

$$+ < \delta, x_o >[(\sin \omega t)\alpha + (\cos \omega t)\beta]\} \tag{5.19}$$

מ-(5.19) רואים בברור כי קימים שני מודים.

האחד נתון על ידי:

$$m_1 = e^{-\sigma t} \; [(\cos \omega t)\alpha - (\sin \omega t)\beta]$$

והשני:

$$m_2 = e^{-\sigma t} \; [(\sin \omega t)\alpha + (\cos \omega t)\beta]$$

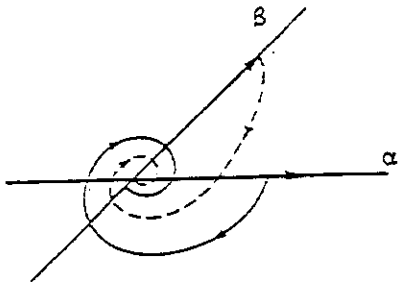
מידות הערור של שני המודים נתונות על ידי:

$$\mu_1 = < \gamma, x_o >$$

$$\mu_2 = < \delta, x_o >$$

אם x_o בכוונו של α יעורר m_1 בלבד ואם x_o בכוונו של β יעורר המוד m_2 בלבד.

בנגוד למקרה של ע"ע-ים ממשיים הטריקטוריות במקרה זה הם ספירלות אקספוננציאליות כאשר ההבדל בין שני המודים מתבטא באמפליטודה ובפאזה השונים של התנודות (ראה ציור 5.2).



ציור 5.2

5.3.9 גם את התגובה המאולצת של המערכת ניתן לבטא באמצעות המודים.

את הפתרון הכללי (5.8) ניתן לרשום בצורה:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} < r^i, x_o > e^{\lambda_i t} v^i + \int_0^t \sum_{i=1}^{n} < r^i, Bu(\tau) > e^{\lambda_i (t-\tau)} v^i d\tau \tag{5.20}$$

באם הכניסה $u(\tau)$ היא כך ש-$Bu(\tau)$ תמיד בכוון v^i יעורר רק המוד m_i על ידי הכניסה. באם למערכת כניסה אחת אזי אם B בכוון v^i יעורר רק המוד ה-i.

5.3.10 אם למערכת ע"ע-ים חוזרים בעלי אותו וקטור עצמי, אזי המודים המתאימים לע"ע-ים אלו יהיו:

$$t^{k-1}e^{\lambda_i t} \qquad k = 1,2,\ldots,n_i \tag{5.21}$$

כאשר n_i מספר החזרות של λ_i.

5.4 תגובת ההלם של מערכת

5.4.1 פונקצית הלם (impulse) - $\delta(t)$.

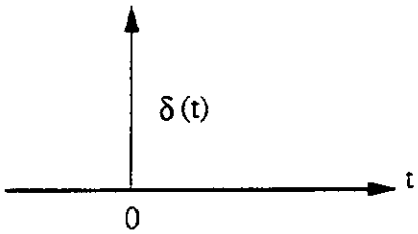
הפונקציה:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{בלתי מוגדרת} & t = 0 \end{cases} \tag{5.22}$$

ו-

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{5.23}$$

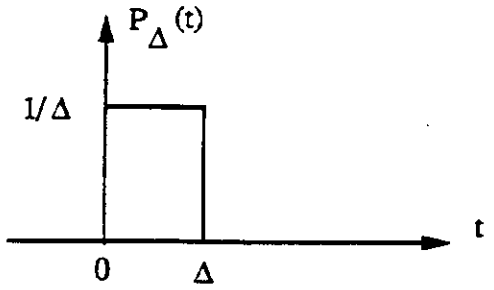
נקראת בשם פונקצית הלם בעצמת יחידה ותסומן גרפית כבציור 5.3.



ציור 5.3:

את פונקצית ההלם ניתן לקבל כגבול פונקצית הפולס הנתונה בציור 5..4:

$$P_\Delta(t) = \begin{cases} 1/\Delta & 0 \le t \le \Delta \\ 0 & \begin{cases} t < 0 \\ t > \Delta \end{cases} \end{cases} \tag{5.24}$$



ציור 5.4:

כאשר $\Delta \to 0$ נקבל:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} P_\Delta(t) \tag{5.25}$$

$\delta(t)$ משמשת לתאור ארועים "רגעיים" ומאפשרת לתאר מתמטית תופעות המתרחשות בזמן קצר ביותר.

$\delta(t-t_1)$ היתו הלם בעצמת יחידה המתרחש בזמן $t=t_1$.

5.4.2 נתונה המערכת (5.6) עם $x_o = x(t=0) = 0$. אם $u(t)=\delta(t)$ נקבל מ-(5.10):

$$g(t) = y(t) = C\int_0^t e^{A(t-\tau)}B\delta(\tau)\,d\tau + D\delta(t)$$

או:

$$g(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ CB + D\delta(t) & t=0 \\ Ce^{At}B & t>0 \end{cases} \tag{5.26}$$

המטריצה $g(t)$ נקראת <u>מטריצת תגובת ההלם</u> של המערכת (5.6). היא מתארת את תגובת ההלם של המערכת בזמן $t \geq 0$ לכניסת הלם בעצמת יחידה ב-$t=0$ כאשר $x_o = 0$. (ראה גם הערה 5.4.5).

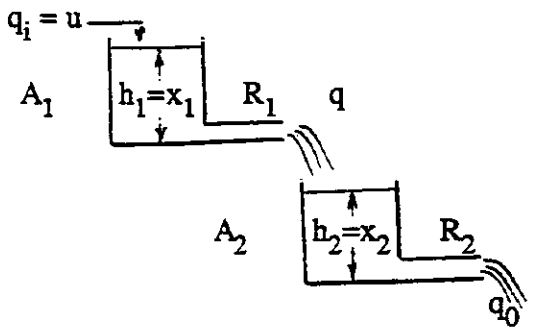
הערה: אם כניסת ההלם מתרחשת בזמן $t = t_1$ ($\delta(t-t_1)$) נקבל במקום (5.26) את:

$$g(t-t_1) = Ce^{A(t-t_1)}B + D\delta(t-t_1) \tag{5.27}$$

זוהי תגובת המערכת להלם בזמן $t = t_1$.

5.4.3 דוגמה: נתונה מערכת המיכלים שבציור 5.5 .

נגדיר $x \triangleq (h_1, h_2)^T$, $u \triangleq q_i$, $y \triangleq x$ עבור הערכים המספריים $R_1 = 1$, $A_1=A_2=1$, $R_2 = 1/2$. נקבל שהצגתה במרחב המצב תהיה:



ציור 5.5

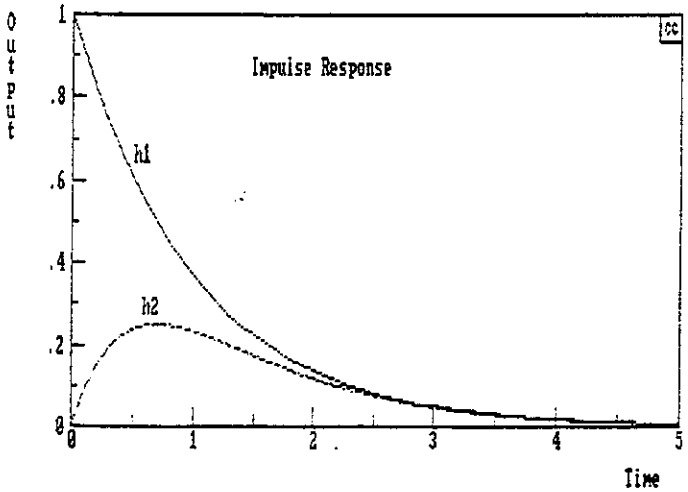
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = I_2 x$$

אם $q_i(t) = u(t) = \delta(t)$ ו- $x_o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ נקבל שתגובת המערכת נתונה על ידי (5.26):

$$g(t) = Ce^{At}B = I_2 \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}$$

השתנות הגבהים בשני המיכלים כפונקציה של הזמן לכניסת ההלם בספיקה q_i נתונה בציור (5.6) (שים לב כי ברגע 0^- היו שני המיכלים ריקים).



ציור 5.6

5.4.4 הערה: מהדוגמא הנ"ל ניתן לראות כי תגובת ההלם של מערכת המיכלים זהה לתגובה החפשית של המיכלים מתנאי ההתחלה $x_o = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

שכן: $Ce^{At}B = Ce^{At}x_o$

במקרה זה.

תכונה זו ניתן להכליל ולאמר שכניסת הלם "טוענת" את המערכת לתנאי התחלה .

5.4.5 הערה: במערכות MIMO (עם $y \in R^r$ ו-$u \in R^m$) $g(t)$ הינה מטריצה ממימד $r \times m$. האיבר $g_{i,j}(t)$ במטריצה זו מציג את תגובת היציאה ה-i להלם בכניסה ה-j .

5.5 מציאת x_o

5.5.1 בדרך כלל בבעיות הפיזיקליות ידועים תנאי התחלה על היציאה $y(t)$ ונגזרותיה. על מנת לפתור את משוואות המצב המתאימות יש לתרגם תנאים אלו ל-x_o. נפתח להלן שיטה כללית עבור מערכות SISO עם $x \in R^n$ למציאת x_o מתוך ידיעת $y(o), \dot{y}(o) \ldots y(o)^{(n-1)}$.

5.5.2 נתונה המערכת:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{5.28}$$

גזירת משואת היציאה n-1 פעמים תתן:

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) = CAx(t) + CBu(t) \tag{5.29}$$

$$\ddot{y}(t) = CA\dot{x}(t) + CB\dot{u}(t) = CA^2x(t) + CABu(t) + CB\dot{u}(t) \tag{5.30}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(t) = CA^{n-1}x(t) + CA^{n-2}Bu(t) + CA^{n-3}B\dot{u}(t) +$$

$$+ \ldots CBu^{(n-2)}(t) \tag{5.31}$$

נגדיר:

$$Y(t) = (y(t), \dot{y}(t), \ldots, y(t)^{(n-1)})^T \tag{5.32}$$

(5.33) $$U(t) = (u(t), \dot{u}(t), \ldots, u(t)^{(n-1)})^T$$

(5.34) $$O_{n\times n} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \qquad T_{n\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ CB & 0 & 0 \ldots & 0 \\ CAB & CB & 0 \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ CA^{n-2}B & CA^{n-3}B \ldots & CB & 0 \end{pmatrix}$$

באמצעות ההגדרות הנ"ל נכתוב את (5.29) - (5.31) בצורה:

(5.35) $$Y(t) = Ox(t) + TU(t)$$

הצבת $t = 0$ ב-(5.35) ופתרונה עבור $x(o)$ תתן:

(5.36) $$x(o) = O^{-1}Y(o) - O^{-1}TU(o)$$

הערה: (5.36) פותח למקרה בו $D = 0$. אם $D \neq 0$ קל להראות כי נקבל

(5.36)' $$x(o) = O^{-1}Y(o) - O^{-1}(T + ID)U(o)$$

5.5.3 הפתרון עבור $x(o)$ הנתון ב-(5.36) נכון במידה ו-O אינה סינגולרית. אם O סינגולרית לא ניתן למצוא את $x(o)$ במימוש הנתון. ממוש אותה מערכת בממוש אחר עשוי להביא ל-O שאינה סינגולרית. משמעותה הפיזיקלית של המטריצה O (הקרויה בתורת הבקרה מטריצת האובסרוביליות של הממוש) אינה נדונה בקורס זה. כדאי רק לציין כי ממוש המערכת בצורת המשערך מביא תמיד ל-O לא סינגולרית.

5.5.4 דוגמה א'

נתונה מערכת SISO באמצעות הקשר כניסה יציאה הבא:

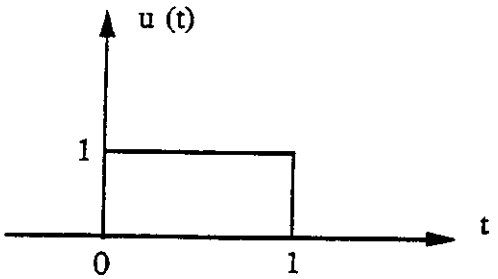
$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 5y = 2u(t)$$

נתונים: $y(0^-) = 0.2$; $\dot{y}(0^-) = -1$ ו-$u(t)$ נתון בציור 5.7.

משמעות ידיעת $y(0^-)$ ו-$\dot{y}(0^-)$ היא שידועים תנאי ההתחלה לפני הפעלת הכניסה .

א. ממש המערכת בצורה המלווה.

ב. מצא את $x(o)$.



ציור 5.7.

פתרון:

ממוש המערכת בצורה המלווה מביא ל-

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -5 & -6\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u$$

$$y=(2\quad 0)\,x$$

מ-(5.34) נקבל:

$$O=\begin{pmatrix}C\\ CA\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix};\qquad O^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

היות ו- $U(0^-)=\begin{pmatrix}u(0^-)\\ \dot{u}(0^-)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ אין צורך לחשב את T.

$Y(0^-)$ תהיה:

$$Y(0^-)=\begin{pmatrix}y(0^-)\\ \dot{y}(0^-)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.2\\ -1\end{pmatrix}$$

נציב הנ"ל ב-(5.36) ונקבל:

$$x(0^-)=O^{-1}Y(0^-)=\begin{pmatrix}0.1\\ -0.5\end{pmatrix}$$

5.5.5 דוגמה ב'

המערכת הפעם נתונה על ידי:

$$\ddot{y}+6\dot{y}+5y=2(u+\dot{u})$$

תנאי ההתחלה והכניסה כבדוגמה א'.

אם נממש המערכת בצורה המלווה נקבל:

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -5 & -6\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u$$

$$y=(2\quad 2)\,x$$

הפעם O תהיה:

$$O=\begin{pmatrix}C\\ CA\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -10 & -10\end{pmatrix}$$

ו-O^{-1} אינה קיימת. מכאן שלא ניתן <u>במקרה זה</u> למצוא את $x(0^-)$. לעומת זאת, אם נממש המערכת בצורת המשערך:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

נקבל:

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

הפעם $\det O \neq 0$ ולכן עבור ממוש זה נוכל למצוא את $x(o)$ לפי (5.36):

$$x(0^-) = O^{-1} Y(0^-) = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

5.6 פתרון משוואות המצב - מערכת תלויה בזמן

לשלמות נציג כאן את פתרון משוואות המצב למערכות ליניאריות תלויות בזמן. אבל לא נעמיק בנושא זה במסגרת קורס זה.

5.6.1 נתונה המערכת:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

$$y = C(t)x + D(t)u \qquad (5.37)$$

משפט: אם $A(t)$ רציפה ו-$B(t)$ ו-$u(t)$ רציפות למקוטעין עבור כל t יהיה הפתרון של (5.37) נתון על ידי:

$$x(t) = \phi(t, t_o)x(t_o) + \int_{t_o}^{t} \phi(t, t_o) B(\tau)\, u(\tau) d\tau \qquad (5.38)$$

5.6.2 הערות:

1. מטריצת המעבר $\phi(t,t_o)$ הינה פתרון של:

$$\frac{d}{dt} \phi(t, t_o) = A(t) \phi(t, t_o)$$

$$\phi(t_o, t_o) = I \qquad (5.39)$$

2. למטריצת המעבר $\phi(t,t_o)$ התכונות הבאות:

א. $\phi(t_2,t_1) \cdot \phi(t_1,t_o) = \phi(t_2,t_o)$ לכל t_o, t_1, t_2 .

ב. $\det \phi(t,t_o) \neq 0$ לכל t_o ו- t .

ג. $\phi^{-1}(t,t_o) = \phi(t_o,t)$ לכל t_o ו- t .

3. במערכות רציפות תלויות בזמן ניתן רק לעיתים רחוקות למצוא בטוי סגור ל-$\phi(t_o,t)$.

4. שים לב שבמערכת תלויה בזמן תלוי הפתרון במפורש ב-t_o ולא ב-$t-t_o$ כמו במערכות סטציונריות.

5. ניתן להראות ש-(5.38) הוא פתרון של (5.37) על ידי גזירתו:

$$\dot{x} = \underbrace{A(t)\phi(t, t_o)x(t_o) + \int_{t_o}^{t} A(t)\phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau}_{A(t)x(t)} + \phi(t, t)B(t)u(t)$$

$$= A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

והצבת $t=t_o$ ב-(5.38) מראה שהוא מקיים את תנאי ההתחלה.

6. תגובת ההלם:

$$g(t,\tau) = C(t)\,\phi(t,\tau)\,B(t) + D(t)\,\delta(t-\tau) \tag{5.40}$$

$g(t,\tau)$ - היא תגובת המערכת בזמן t לכניסת הלם בזמן τ .

ב. <u>מערכות בדידות</u>

5.7 <u>מערכת סטציונרית</u>

5.7.1 נתונה המערכת הסטציונרית:

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i)$$

$$y(i) = Cx(i) + Du(i) \tag{5.41}$$

עם תנאי ההתחלה $x(i_o)$.

פתרון (5.41), כאשר נתון $u(i)$ $(i \geq i_o)$ הוא:

$$x(k) = A^{k-i_o}x(i_o) + \sum_{j=i_o}^{k-1} A^{k-j-1}Bu(j) \qquad k \geq i_o + 1 \tag{5.42}$$

ואם $i_o = 0$ נקבל:

$$x(k) = A^k x(o) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} Bu(j) \tag{5.43}$$

הצבת (5.43) במשואת היציאה נותנת את הפתרון עבור היציאה $y(k)$:

$$y(k) = CA^k x(o) + C \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} Bu(j) + Du(k) \tag{5.44}$$

5.7.2 את (5.42) ניתן לקבל על ידי הצבה ישירה של (5.41) עבור i_o+1, i_o+2, ..., k כדלהלן:

$$x(i_o+1) = Ax(i_o) + Bu(i_o)$$

$$x(i_o+2) = Ax(i_o+1) + Bu(i_o+1) = A^2x(i_o) + ABu(i_o) + Bu(i_o+1)$$

$$x(i_o+3) = Ax(i_o+2) + Bu(i_o+2) = A^3x(i_o) + A^2Bu(i_o) +$$

$$+ ABu(i_o+1) + Bu(i_o+2)$$

וכך הלאה עד $x(k)$ המתקבל כב-(5.42).

5.7.3 המטריצה $\phi(k) = A^k$ נקראת <u>**מטריצת המעבר**</u> של המערכת.

חשוב A^k מתבצע, כחשוב e^{At}, באחת מהשיטות הבאות:

א. שיטת קילי המילטון, ב. שיטת סילוסטר, ג. באמצעות התמרת z (ראה פרק 6); ד. על ידי לכסונה של A (או הבאתה לצורת גיורדן):

$$A^k = MJ^kM^{-1} \tag{5.45}$$

5.7.4 בדומה למערכות רציפות ניתן לכתוב הפתרון (5.43) באמצעות המודים:

$$x(k) = \sum_{j=1}^{n} [\mu_j \lambda_j^k + \sum_{i=0}^{k-1} < r^j, Bu(i) > \lambda_j^{k-i-1}] v^j \tag{5.46}$$

כאשר v^j הם הוי-ים הימניים של A (עמודות M), r^j הם הוי-ים השמאליים של A (שורות M^{-1}), μ_j היא מידת הערור של המוד ה-j על ידי תנאי ההתחלה ונתונה על ידי:

$$\mu_j = < r^j , x_o >$$

ו- $< r^j , Bu(i) >$ היא מידת הערור של המוד ה-j על ידי הכניסה. בדומה למערכות רציפות מוגדר המוד ה-j על ידי:

$$m_j = \lambda^k v^j \qquad (5.47)$$

5.7.5 דוגמה: נתונה משוואת ההפרשים:

$$y_{k+2} - y_{k+1} + \frac{1}{4} y_k = 2u_{k+2}$$

ממרש המערכת בצורה המלווה:

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k$$

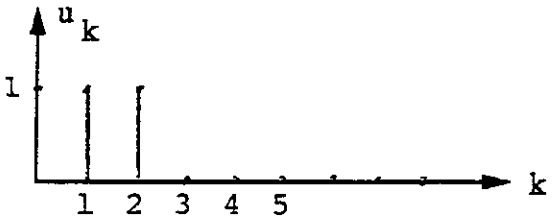
$$y_k = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} x_k + 2u_k$$

נתון $x_o = 0$ ו-

$$u_k = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & 0 \le k \le 2 \\ 0 & k \ge 3 \end{cases}$$

u_k נתון בציור 5.8.

יש למצוא את x_n ו-y_n עבור $n \ge 0$.



ציור 5.8

פתרון: היות ו-$x_o = 0$ ו-$u_k = 0$ עבור $k \ge 3$ נקבל מ-(5.43):

$$x_n = \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-j-1} B u_j = A^{n-1} B u_o + A^{n-2} B u_1 + A^{n-3} B u_2$$

כדי למצוא את x_n באופן מפורש יש לחשב $A^j B$. נעזר בשיטת קילי המילטון:

$$A^j = \alpha_o I + \alpha_1 A = \begin{pmatrix} \alpha_o & \alpha_1 \\ -\frac{1}{4}\alpha_1 & \alpha_o + \alpha_1 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$A^jB=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_o+\alpha_1\end{pmatrix}$$

חשוב α_1, α_o : (עייע-ים $\lambda_1=\lambda_2=1/2$)

$$(\frac{1}{2})^j=\alpha_o+\frac{1}{2}\alpha_1$$

$$j(\frac{1}{2})^{j-1}=\alpha_1$$

ו-

$$\alpha_o+\alpha_1=(\frac{1}{2})^j(1+j)$$

מכאן:

$$A^jB=(\frac{1}{2})^j\binom{2j}{1+j} \qquad (j\geq 0)$$

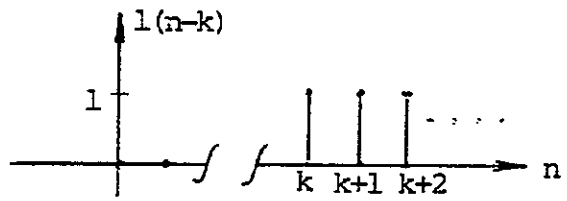
הצבת הנ"ל ב-x_n ותתן:

$$x_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\binom{2(n-1)}{n}1(n-1)+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\binom{2(n-2)}{n-1}1(n-2)+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\binom{2(n-3)}{n-2}1(n-3) \qquad (5.48)$$

כאשר $1(n-k)$ נקראת <u>פונקציית מדרגה</u> בגודל יחידה ומוגדרת על ידי (ראה גם ציור 5.9):

$$1(n-k)=\begin{cases}0 & n<k\\ 1 & n\geq k\end{cases} \qquad (5.49)$$



ציור 5.9

את x_n נוכל לכתוב באופן מפורש יותר אם נציב $n=1$, $n=2$ ו-$n\geq 3$ בפתרון הנ"ל :

$$x_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & n = 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & n = 1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & n = 2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \begin{bmatrix} (7n-17)/2 \\ (7n-10)/4 \end{bmatrix} & n \geq 3 \end{cases} \tag{5.50}$$

את x_n ב-(5.50) עבור $n\geq 3$ קבלנו על ידי סיכום האיברים ב-(5.48) . הצבת x_n, (5.48), במשואת היציאה תתן:

$$y_n = (-\frac{1}{2} \quad 2)x_n + 2u_n = (\frac{1}{2})^{n-1}(n+1)\ 1(n-1) + (\frac{1}{2})^{n-2} n\ 1(n-2) +$$

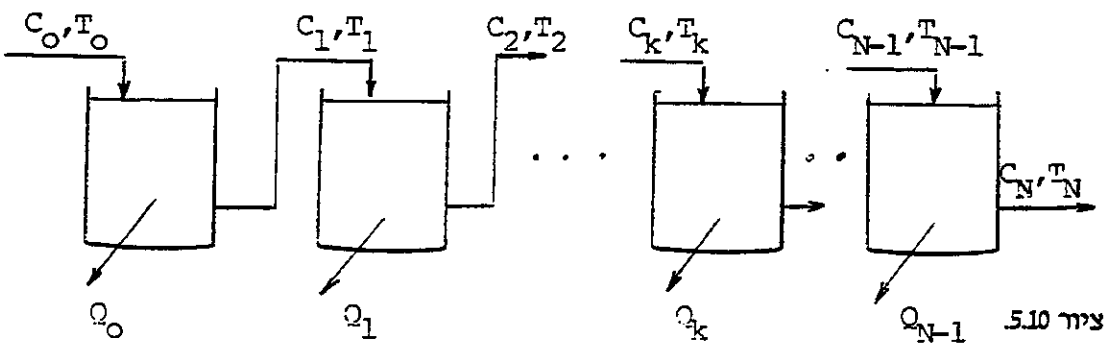
$$+ (\frac{1}{2})^{n-3}(n-1)\ 1(n-3) + 2u_n$$

ובמפורש:

$$y_n = \begin{cases} 2 & n = 0 \\ 4 & n = 1 \\ 3\frac{1}{2} & n = 2 \\ (\frac{1}{2})^{n-1}(7n-3) & n \geq 3 \end{cases}$$

5.7.6 דוגמה: בדוגמה זו נראה כי ניתן להשתמש בפתרון הכללי של משואות המצב הבדידות לבעיות בהן המשתנה הבלתי תלוי אינו דוקא זמן בדיד. במקרה זה יהיה זה המקום הסידורי.

נתונה מערכת של N ריאקטורים כימיים, (ראה ציור 5.10), כשבכל ריאקטור מתבצעת ריאקציה המשחררת חום.



ציור 5.10

במצב שווי משקל מאזן המסה והאנרגיה בכל מיכל נתון על ידי שתי המשואות הבאות:

מאזן מסה: $C_k - C_{k+1} - aC_{k+1} = 0 \qquad a \neq 1$

מאזן חום: $T_k - T_{k+1} + bC_{k+1} - dQ_k = 0$

כאשר:

C_k - הרכוז בריאקטור ה-k

T_k - טמפרטורת התמיסה בריאקטור ה-k

Q_k - קצב סלוק החום בריאקטור ה-k+1

a,b,d - פרמטרים קבועים התלויים בספיקה, נפח המיכלים ותכונות התמיסה והריאקציה.

א. בחר ב-C_k ו-T_k כמשתני מצב וב-dQ_k ככניסה, וכתוב באמצעות הנ"ל את משוואות המצב.

ב. נתונים הערכים a=2 , b=3 , d=5 ביחידות מתאימות. מצא בעזרת המשוואות שמצאת בסעיף א' את T_N, C_N (הרכוז והטמפרטורה ביציאת המיכל ה-N) כפונקציה של $C_o, T_o, Q_1, \ldots, Q_{N-1}$.

<u>פתרון</u>

א. נתון:

$$C_k - C_{k+1} - aC_{k+1} = 0$$

$$T_k - T_{k+1} + bC_{k+1} - dQ_k = 0$$

בחירת T , C כמשתני המצב x_1, x_2 בהתאמה, dQ_k ככניסה u_k תביא ל:

$$x_1(k+1) = \frac{1}{1+a} x_1(k)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + bx_1(k+1) - u(k) = \frac{b}{1+a} x_1(k) + x_2(k) - u(k)$$

או:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+a} & 0 \\ \frac{b}{1+a} & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(k)$$

ב. הפתרון הינו:

$$x(N) = A^N x(0) + \sum_{j=0}^{N-1} A^{N-j-1} Bu(j)$$

היות ומימד A הינו (2x2) נוכל לרשום:

$$A^p = \alpha_1 A + \alpha_o I$$

הערכים העצמיים של A הינם:

$$\lambda_1 = 1\ ,\ \lambda_2 = a_1$$

כאשר סמנו:

$$a_1 = \frac{1}{1+a}$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 + \alpha_o \\ a_1^p &= a_1 u_1 + \alpha_o \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{a_1^p - 1}{a_1 - 1} \qquad \alpha_o = \frac{a_1 - a_1^p}{a_1 - 1}$$

$$A^p = \frac{a_1^p - 1}{a_1 - 1}\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ ba_1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{a_1 - a_1^p}{a_1 - 1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^p & 0 \\ \dfrac{ba_1(a_1^p - 1)}{(a_1 - 1)} & 1 \end{bmatrix}$$

עבור כל p :

$$A^p B = \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ומכאן:

$$x(N) = \begin{bmatrix} a_1^N & 0 \\ \dfrac{ba_1(a_1^N - 1)}{a_1 - 1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_o \\ T_o \end{bmatrix} + \sum_{k=0}^{N-1}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} dQ(k)$$

ובאופן מפורש:

$$C(N) = a_1^N C_o = \frac{1}{(1+a)^N} C_o$$

$$T(N) = \frac{ba_1(a_1^N - 1)}{a_1 - 1} C_o + T_o - d\sum_{j=1}^{N-1} Q_j =$$

$$= \frac{b[(a+1)^N - 1]}{a(a+1)^N} C_o + T_o - d\sum_{j=1}^{N-1} Q_j$$

5.7.8 <u>תגובת הלם</u>

הלם בדיד בעצמת יחידה המתרחש ברגע $k=i$ (k הוא הזמן הבדיד הי"רץ") ואשר יסומן $\delta(k-i)$ מוגדר על ידי:

$$\delta(k-i)=\begin{cases}1 & k=i\\ 0 & k\neq i\end{cases} \tag{5.51}$$

הלם ברגע $k=0$ יצוין על ידי $\delta(k)$.

אם נציב $\delta(k-i)$ בפתרון (5.43) נקבל שמטריצת תגובת ההלם, $g(k-i)$, ($x_0=0$) נתונה על ידי:

$$g(k-i)=\begin{cases}CA^{k-i-1}B & k\geq i+1\\ D & k=i\\ 0 & k<i\end{cases} \tag{5.52}$$

נציין שוב ש-$g(k-i)$ הינה תגובת המערכת בזמן k לכניסת הלם בעצמת יחידה בזמן i.

5.8 <u>פתרון משואות המצב - מערכת תלויה בזמן</u>

נציג בקצרה את הפתרון עבור משואות מצב בדידות תלויות בזמן. במערכות אלו לא נעסוק יותר בקורס זה.

5.8.1 נתונה המערכת:

$$\begin{aligned}x(i+1)&=A(i)x(i)+B(i)u(i)\\ y(i)&=C(i)x(i)+D(i)u(i)\end{aligned} \tag{5.53}$$

פתרון (5.53) עבור $x(i_0)$ ו-$u(i)$ ($i\geq i_0$) נתון על ידי:

$$x(k)=\phi(k,i_0)\,x(i_0)+\sum_{j=i_0}^{k}\phi(k,j+1)\,B(j)u(j)\qquad k\geq i_0+1 \tag{5.54}$$

5.8.2 $\phi(k,i_0)$ הינה מטריצת המעבר הנתונה על ידי:

$$\phi(k,i_0)=A(k-1)\,A(k-2),\ \ldots,\ A(i_0)\qquad k\geq i_0+1 \tag{5.55}$$

ו-

$$\phi(i_0,i_0)=I$$

5.9 מציאת x_0

את אשר פתחנו בסעיף 5.5 עבור מערכות רציפות נפתח כאן עבור מערכות בדידות.

5.9.1 נתונה מערכת בדידה על ידי משואת ההפרשים:

$$\sum_{i=o}^{n} a_i y(k+i) = \sum_{i=o}^{n-1} b_i u(k+i) \tag{5.56}$$

עם תנאי התחלה $y(0)$, $y(1)$,...,$y(n-1)$, והכניסה $u(i)$ ידועה עבור כל $i \geq 0$.

5.9.2 ממוש המערכת במרחב המצב:

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i)$$

$$y(i) = Cx(i) \qquad x \in R^n \tag{5.57}$$

כדי לקבל את $x(o)$ המתאים נקוט בדרך דומה לזו שבסעיף 5.5 . נכתוב:

$$y(o) = Cx(o)$$

$$y(1) = Cx(1) = CAx(o) + CBu(o)$$

$$y(2) = Cx(2) = CA^2x(o) + CABu(o) + CBu(1)$$

$$\vdots$$

$$y(n-1) = Cx(n-1) = CA^{n-1}x(o) + CA^{n-2}Bu(o) + \ldots CBu(n-1) \tag{5.58}$$

את (5.58) נציג בצורה :

$$\begin{pmatrix} y(o) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{pmatrix} = O\ x(o) + T \begin{pmatrix} u(o) \\ \vdots \\ u(n-1) \end{pmatrix} \tag{5.59}$$

כאשר O נתונה על ידי :

$$O_{n \times n} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

ו-$T_{n \times n}$ היא כב-(5.34).

פתרון (5.59) עבור $x(o)$ יתן:

$$x(o) = O^{-1} \begin{pmatrix} y(o) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{pmatrix} - O^{-1} T \begin{pmatrix} u(o) \\ \vdots \\ u(n-1) \end{pmatrix} \tag{5.60}$$

הערה: אם $D \neq 0$ נקבל את (5.60) אלא שאת T יחליף T+ID (ראה ' (5.36).

5.9.3 הערה 5.5.3 תופסת גם כאן. כלומר (5.60) נכון במידה ו-O אינה סינגולרית. אם O סינגולרית אזי לא ניתן למצוא את x(o) בממוש הנתון. כאשר המערכת נתונה בצורת המשערך המטריצה O תמיד אינה סינגולרית .

5.10 מערכת בדידה אקוילנטית - מערכות דגומות

5.10.1 נתונה מערכת רציפה באמצעות המימוש:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du \qquad (5.61)$$

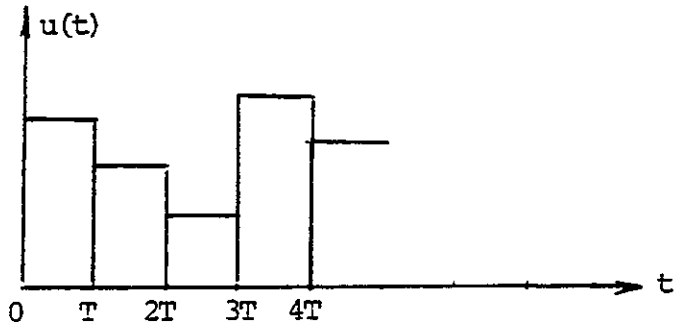
נניח כי הכניסה למערכת הרציפה, u(t) , רציפה למקוטעין כך ש-

$$u(t) = \text{constant} \qquad nT \le t < (n+1)T \qquad (5.62)$$

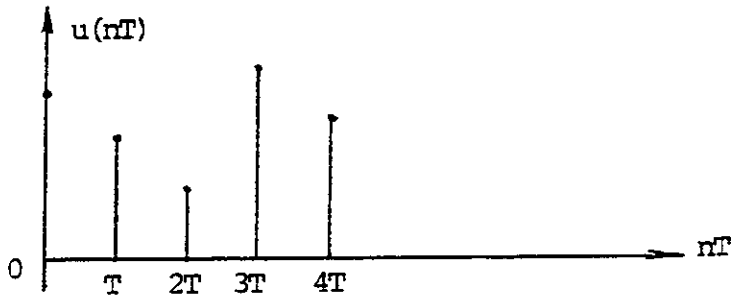
הכניסה (5.62) מכונה "כניסת מדרגות" ברוחב קבוע T (ראה ציור 5.11) . ניתן למצוא מערכת בדידה:

$$x((n+1)T) = A_s x(nT) + B_s u(nT)$$

$$y(nT) = C_s x(nT) + D_s u(nT) \qquad (5.63)$$



ציור 5.11.



ציור 5.12.

כך שכאשר טור הכניסות הבדידות u(nT) שווה לערכי הכניסה הרציפה (כניסת מדרגות) ברגעים t=nT (u(nT)=u(t=nT)), ראה ציור 5.12, אזי היציאה הבדידה y(nT) זהה ל-y(t=nT) , יציאת המערכת הרציפה ב-t=nT, ווקטור המצב הבדיד x(nT) שווה ל-x(t=nT). מערכת בדידה המקימת התנאי הנ"ל תקרא מערכת בדידה אקוילנטית.

5.10.2 על מנת לקבל את הממוש הבדיד האקוילנטי (A_s, B_s, C_s, D_s) מתוך הממוש הרציף (A,B,C,D) כותבים את הפתרון הרציף של (5.61) באינטרול $nT \le t < (n+1)T$ כאשר תנאי ההתחלה הוא $x(nT)$ ו- $u(t)$ מקיים את (5.62):

$$x(t) = e^{A(t-nT)}x(nT) + \int_{nT}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(nT)d\tau \tag{5.64}$$

נציב עתה $t = (n+1)T$ ב-(5.64) ונקבל:

$$x((n+1)T) = e^{AT}x(nT) + [\int_{nT}^{(n+1)T} e^{A[(n+1)T-\tau]}\, Bd\tau]\, u(nT) \tag{5.65}$$

השוואת (5.65) עם (5.63) מראה כי:

$$A_s = e^{AT} \tag{5.66}$$

$$B_s = \int_{nT}^{(n+1)T} e^{A[(n+1)T-\tau]}Bd\tau = \int_{0}^{T} e^{A\tau}Bd\tau \tag{5.67}$$

האגף הימני ב-(5.67) מתקבל על ידי החלפת משתנים.

אם A <u>אינה</u> סינגולרית ניתן לחשב באופן כללי את (5.67). B_s נתונה אז על ידי:

$$B_s = A^{-1}(e^{AT} - I)B \tag{5.68}$$

הצבת $t = nT$ במשואת היציאה הרציפה (5.61) מביאה ל:

$$C_s = C \quad ; \quad D_s = D \tag{5.69}$$

<u>הערה</u>: יש לשים לב לעובדה ש- $\det(A_s) \neq 0$.

5.10.3 דוגמה: נתונה מערכת רציפה:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \quad 1)\, x + u$$

נתון כי $u(t)$ מקיים את (5.62). יש למצוא מודל בדיד אקוילנטי.

פתרון:

נשתמש בקשרים (5.66), (5.67) ו-(5.69) ונקבל:

$$A_s = e^{AT} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B_s = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau = \int_0^T \begin{pmatrix} T \\ 1 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} T^2/2 \\ T \end{pmatrix}$$

$$C_s = C \quad ; \qquad D_s = D$$

לכן המערכת הבדידה האקוויולנטית תהיה:

$$x_{(n+1)T} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_{(nT)} + \begin{pmatrix} T^2/2 \\ T \end{pmatrix} u_{(nT)}$$

$$y_{(nT)} = (1 \quad 1)\, x_{(nT)} + u_{(nT)}$$

5.10.4 דוגמה: בדוגמה 5.10.3 הנח כי $x_o = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ וכי $u(t) = 1(t)$ (הפונקציה $1(t)$ היא שינוי מדרגה בגודל יחידה המתרחש ב-t=0 . כלומר $1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$). כניסה זו מקיימת את (5.62). נפתור $x(t)$ במערכת הרציפה ואת $x(nT)$ במערכת הבדידה האקוויולנטית ונראה כי $x(t=nT)=x(nT)$ ו- $y(t=nT)=y(nT)$. ($x(t=nT)$ היא פתרון המערכת הרציפה בהצבת $t=nT$; $x(nT)$ היא פתרון המערכת הבדידה).

פתרון המערכת הרציפה:

$$x(t) = e^{At}x_o + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_o + \int_0^t \begin{pmatrix} t-\tau \\ 1 \end{pmatrix} d\tau =$$

$$= x(t) = \begin{pmatrix} 1 + t + t^2/2 \\ 1 + t \end{pmatrix} \qquad (t \geq 0) \quad ;$$

$$y(t) = (1 \quad 1)\, x(t) + u(t) = 3 + 2t + t^2/2 \qquad (t \geq 0)$$

פתרון המערכת הבדידה:

$$x(nT) = (A_s)^n x_o + \sum_{j=0}^{n-1} (A_s)^{n-j-1} B_s u(nT)$$

היות ו-

$$(A_s)^m = \begin{pmatrix} 1 & mT \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נקבל:

$$x(nT) = \begin{pmatrix} 1 & nT \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_o + \sum_{j=0}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & (n-j-1)T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^2/2 \\ T \end{pmatrix} \cdot 1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + nT + \sum_{j=0}^{n-1} (T^2/2 + (n-1)T^2 - jT^2) \\ 1 \quad + \sum_{j=0}^{n-1} T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + nT + \frac{(nT)^2}{2} \\ 1 + nT \end{pmatrix}$$

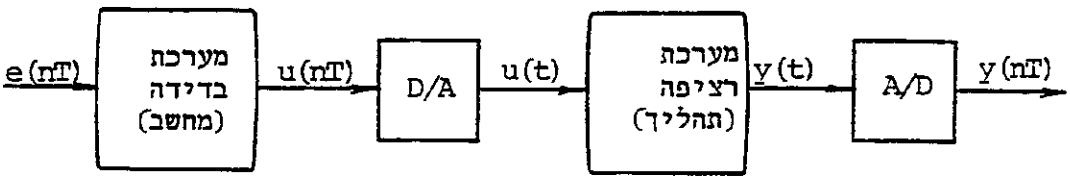
ו-

$$y(nT) = (1 \quad 1)\, x(nT) + u(nT) = 3 + 2nT + \frac{(nT)^2}{2} \qquad n \geq 0$$

הצבת $t=nT$ ב-$x(t)$ וב-$y(t)$ בפתרון הרציף נותנים את $x(nT)$ ו-$y(nT)$ בהתאמה בפתרון הבדיד.

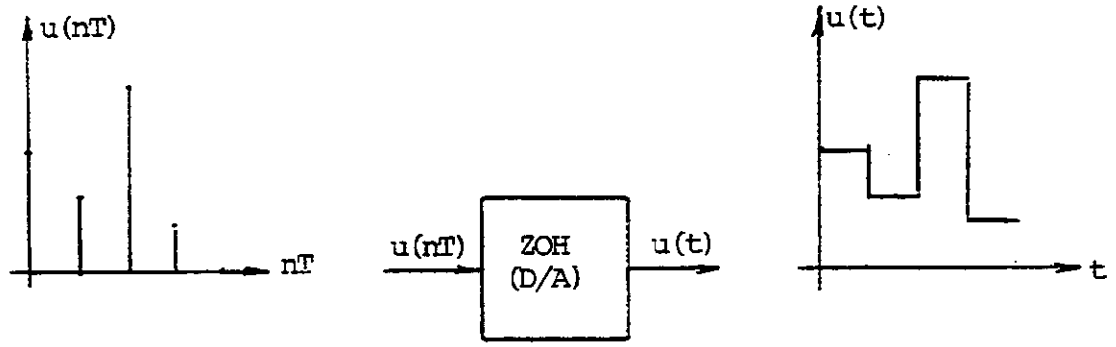
5.10.5 שמוש - מערכות דגימה (Sampled-Data System)

הצורך במערכות בדידות אקוילנטיות בא ממערכות דגימה. מערכות דגימה הן מערכות המורכבות ממערכות רציפות ומערכות בדידות. דוגמה לכך הן מערכות בקרה בהן מחשב (מערכת בדידה)מבקר מערכת רציפה (התהליך). ראה ציור 5.13.



ציור 5.13

היות והמחשב הינו מערכת בדידה, אות הכניסה אליו, $e(nT)$, ואות היציאה ממנו $u(nT)$ - שניהם בדידים. התהליך בהיותו מערכת רציפה, אות הכניסה אליו, $u(t)$, ואות היציאה ממנו $y(t)$ הינם אותות רציפים. לא ניתן לחבר את אות היציאה הבדיד מהמחשב לכניסת התהליך ללא מתמר ההופך את האות הבדיד (הנקרא גם אות דיגיטלי) לאות רציף (הנקרא גם אות אנלוגי). מתמר ההופך אות דיגיטלי לאות אנלוגי נקרא מתמר D/A (Digital to Analog). המתמר D/A הפשוט ביותר נקרא מחזיק נתונים מסדר 0 (Zero Order Hold המסומן בקצור ZOH). פעולת ה-D/A מסוג ZOH מסתכמת בכך שהוא הופך סיגנל בדיד הנכנס אליו לסיגנל רציף בצורת מדרגות - ראה ציור 5.14.

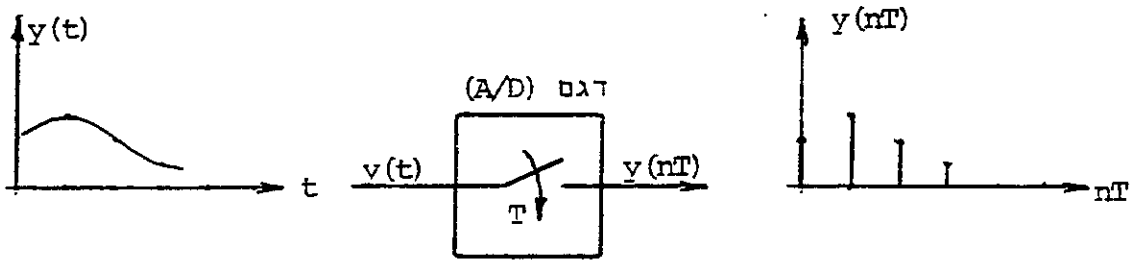


ציור 5.14

כלומר,

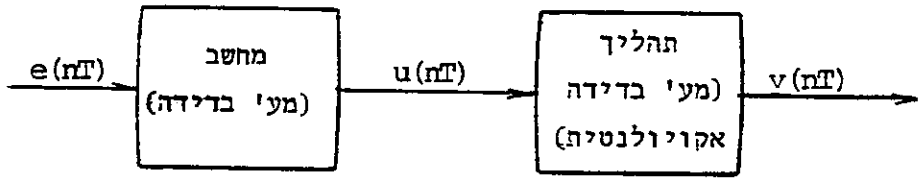
$$u(t) = u(nT) \qquad nT \le t < (n+1)T$$

על מנת שיציאת התהליך, $y(t)$, תוכל להיות מוזנת למחשב הבקרה לצורך עבוד, יש להפכה לאות בדיד. הפיכה זו מבוצעת על ידי מתמר A/D (Analog to Digital). מתמר A/D נקרא גם דגם (Sampler) ופעולתו מוראית בציור 5.15.



ציור 5.15

הדגם דוגם את $y(t)$ כל T יחידות זמן ומוציא סיגנל בדיד $y(nT)$. T נקרא לכן אינטרבל הדגימה. ה-ZOH (D/A) מביא לידי כך שהכניסה הרציפה, $u(t)$, לתהליך תתנהג לפי (5.62). לכן אם ה-D/A וה-A/D מסונכרנים תיצג המערכת הבדידה האקוילנטית אשר פתחנו בסעיפים הקודמים את התהליך הרציף ברגעי הדגימה nT . ניתן אז לנתח המערכת שבציור 5.13, המורכבת ממערכת בדידה ורציפה, על ידי המערכת שבציור 5.16 אשר כל מרכיביה בדידים. דבר זה מקל על נתוחן ותכנונן של מערכות דגימה.



ציור 5.16

5.10.6 שמוש - פתרון נומרי

פתרון נומרי במחשב דיגיטלי של מערכת רציפה כרוך בהפיכתה למערכת בדידה. לכן ניתן להשתמש במערכת הבדידה האקוילנטית לצורך פתרון נומרי של מערכת רציפה. היות ווקטור המצב והיציאה של המערכת הבדידה זהים ברגעי הדגימה לאלו של המערכת הרציפה אם כניסתה מקימת את (5.62), ניתן לקרב את $u(t)$ עם T מספיק קטן למדרגות ולפתור המערכת הבדידה האקוילנטית. T בשמוש זה יקרא אינטרבל האינטגרציה.

5.10.7 ניתן כמובן לקבל פתרונות נומריים למערכות רציפות גם בדרכים אחרות. אחת מאלו היא בה מקרבים את $\dot{x}(t)$ ב-(5.61) על ידי:

$$\dot{x}(t) \sim \frac{x((n+1)T) - x(nT)}{T} \tag{5.70}$$

הצבת (5.70) ב-(5.61) מביאה ל-

$$\frac{x((n+1)T) - x(nT)}{T} = Ax(nT) + Bu(nT) \tag{5.71}$$

חלוץ $x((n+1)T)$ ב-(5.71) נותנת:

$$x((n+1)T) = (I+AT)\,x(nT) + TBu(nT) \tag{5.72}$$

משואה (5.72) הינה משואת מצב בדידה המתארת בקרוב את משואת המצב הרציפה. אם נצרף ל-(5.72) את משואת היציאה (5.61) עבור $t = nT$ נקבל מודל בדיד מקורב למערכת הרציפה (5.61) אשר מאפשר פתרונה הנומרי. המודל הבדיד נתון לכן על ידי:

$$x((n+1)T) = \bar{A}x(nT) + \bar{B}u(nT)$$

$$y(nT) = Cx(nT) + Du(nT) \tag{5.73}$$

כאשר:

(5.74) $$\bar{A} = I + AT \quad ; \quad \bar{B} = TB$$

פרק 6 : פתרון משואות המצב באמצעות התמרות

6.1 התמרות לפלס (Laplace Transform)

6.1.1 התמרת לפלס הינה העתקה ליניארית אנטגרלית של הפונקציה $f(t)$ למשור הקומפלקסי S באופן הבא :

א. העתקה דו-צדדית

$$F_{II}(s) = L_{II}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)dt \qquad (6.1)$$

ב. העתקה חד-צדדית

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)dt \qquad (6.2)$$

בהעתקה החד-צדדית משתמשים לבחינת תגובות מערכות עבור $t > 0$. זאת משום שאם יודעים את הכניסה למערכת עבור $t \geqslant 0$ ואת תנאי ההתחלה ניתן להניח ש-$f(t) = 0$ עבור $t < 0$.

בהעתקה הדו-צדדית משתמשים באותם מקרים כשיש חשיבות ומשמעות גם ל-$f(t)$ עבור $t < 0$ כמו למשל בבעיות סטטיסטיות.

6.1.2 תנאי קיום ההתמרה

לא לכל פונקציה קימת התמרת לפלס. רק ל-$f(t)$ עבורם האינטגרלים ב-(6.1) ו-(6.2) מתכנסים יש התמרות, וההתמרה קימת רק עבור ערכי s עבורם האינטגרלים מתכנסים (תחום ההתכנסות):

א. $f(t)$ רציפה למקוטעין בכל אנטרול זמן סופי.

ב. התמרה חד צדדית - באם קימים קבועים M_0 ו-α_0 כך ש-

$$|f(t)| < M_0 e^{\alpha_0 t}$$

אזי $F(s)$ קיים עבור כל s ב-$Re(s) > \alpha_0$ (תחום ההתכנסות).

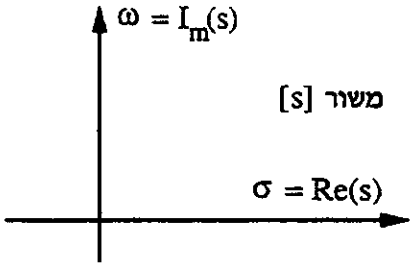
ג. התמרה דו צדדית - באם קימים קבועים $M_1, M_2, \alpha_1, \alpha_2$ כך ש-$\alpha_1 < \alpha_2$ ו-

$$|f(t)| < M_1 e^{\alpha_1 t} \quad ; \quad t > 0$$

$$|f(t)| < M_2 e^{\alpha_2 t} \quad ; \quad t < 0$$

אזי $F_{II}(s)$ קיים עבור כל s ברצועה - $\alpha_1 < Re(s) < \alpha_2$ (תחום ההתכנסות).

6.1.3 s הוא משתנה קומפלקסי הנקרא על שם ההתמרה "משתנה לפלס".



$$s = \sigma + j\,\omega$$

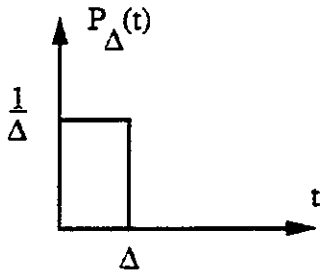
6.1.4 <u>התמרת לפלס ההפוכה (Inverse Laplace Transform)</u>

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds \qquad (6.3)$$

(6.3) נכון להתמרה חד-צדדית ולדו-צדדית.

c חייב להיות בתחום ההתכנסות של (6.1) או (6.2).

6.1.5 <u>דוגמאות לחשוב התמרות חד-צדדיות</u>

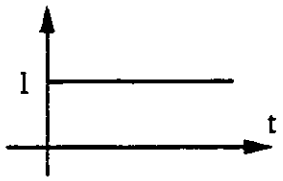


1) פונקצית הלם (impulse) $f(t) = \delta(t)$.

$$F(s) = \lim_{\Delta \to 0}\int_0^{\Delta} e^{-st}\cdot\frac{1}{\Delta}dt = \lim_{\Delta \to 0}\frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta} e^{-st}dt$$

$$= \lim_{\Delta \to 0}\frac{1-e^{-s\Delta}}{s\Delta} = \lim_{\Delta \to 0}\frac{1}{s\Delta}\left[s\Delta - \frac{(s\Delta)^2}{2} + , \ldots\right] = 1$$

$$(Re(s) > -\infty)$$



2) פונקציית מדרגה (step) $f(t) = 1(t)$.

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

. $(Re(s) > 0)$

3) פונקציית ריצה (ramp) $f(t) = t \cdot 1(t)$.

$$F(s) = \frac{1}{s^2}$$

4) באופן דומה

$$L[t^n \cdot 1(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

5) אקספוננט - $f(t) = e^{at} \cdot 1(t)$ (a - קבוע ממשי או קומפלכסי).

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a}$$

. $(Re(s) > a)$

6) באופן דומה:

$$L[t^{n-1} e^{at}] = \frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$$

7) פונקציות טריגונומטריות ; $f(t) = \sin at$; $\cos at$ (a - ממשי).

לפי 5) $$L[e^{jat}] = \frac{1}{s - ja} = \frac{s + ja}{s^2 + a^2}$$

אך $$e^{jat} = \cos at + j \sin at$$

דהיינו: $$L[e^{jat}] = L[\cos at] + j\, L[\sin at]$$

מכאן $L[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}; \qquad L[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}$

ותחום ההתכנסות : - $Re(s) > 0$.

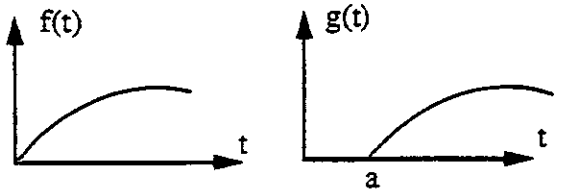
6.1.6 <u>תכונות ומשפטי התמרת לפלס</u>

1. <u>ליניאריות</u> $L(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = c_1 L[f_1(t)] + c_2 L[f_2(t)]$

2. <u>הזזה קומפלקסית</u> - אם $Lf(t) \stackrel{\Delta}{=} F(s)$

אזי $L(e^{at} f(t)) = F(s-a)$ (6.3)

3. <u>הזזה ממשית</u> - אם $Lf(t) \stackrel{\Delta}{=} F(s)$



ו- $g(t) = \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$

a - ממשי וסופי (ראה ציור) אזי:

$$L[f(t-a)] = L[g(t)] = e^{-as} F(s) \qquad (6.4)$$

הוכחה:

$$L[g(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)\, dt = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\, dt$$

על ידי שנוי המשתנים הבא: $v = t - a$, נקבל:

$$L[g(t)] = \int_0^\infty e^{-s(v+a)} f(v)\, dv = e^{-as} \int_0^\infty e^{-sv} f(v)\, dv = e^{-as} F(s)$$

4. <u>התמרת נגזרת ראשונה</u> - באם $L[f(t)] \stackrel{\Delta}{=} F(s)$ ובאם $\frac{d}{dt} f(t)$ ברת-התמרה (סעיף 6.1.2), אזי -

$$L\{\frac{d}{dt} f(t)\} = sF(s) - f(0^+).$$

כאשר $f(0^+)$ הוא הגבול של $f(t)$ כאשר $t \to 0^+$ דרך ערכים חיוביים של הזמן.

(הערה: נסמן $f(0^+) = f(0)$).

הוכחה:

$$L[\frac{d}{dt} f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \frac{d}{dt}(f(t))dt = e^{-st}f(t)|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt =$$

$$= sF(s) - f(0) \tag{6.5}$$

5. התמרת נגזרת מסדר n .

$$L(\frac{d^n f(t)}{dt^n}) = s^n F(s) - \sum_{i=o}^{n-1} s^i f^{(n-i-1)}(0)$$

$$= s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) \ldots$$

$$- sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \tag{6.6}$$

כאשר :

$$f^{(p)} \triangleq \frac{d^p f}{dt^p}$$

למשל עבור n=2 נקבל מ-(6.6)

$$L(\ddot{f}) = s^2F(s) - sf(o) - \dot{f}(o)$$

6. התמרת אינטגרציה בזמן

אם $L[f(t)] \triangleq F(s)$

אזי $L[\int_0^t f(u)du] = \frac{f(s)}{s}$ (6.7)

הוכחה:

נגדיר

$$g(t) \triangleq \int_0^t f(u)du$$

לכן $\dot{g}(t) = f(t)\ ; \quad g(0) = 0$

ומכאן $L(\dot{g}(t)) = sL(g(t)) - g(0) = F(s)$

7. <u>משפטי הערך ההתחלתי והערך הסופי</u>

התמרת לפלס מעתיקה את הפונקציה, $f(t)$, באם היא ברת-התמרה (סעיף 6.1.2), לפונקציה $F(s)$ במשתנה הקומפלקסי s . אין כל משמעות בשאלה להיכן מעתיקה ההתמרה את הנקודה $f(t_1)$, כאשר t_1 זמן מסויים כלשהוא , שונה מ-0 ומ-∞ . (הדבר דומה לתרגום מילה משפה לשפה. לכל המלה בשפה א' קיימת מלה מתאימה בשפה ב'. לא ניתן לתרגם מלה משפה לשפה על ידי תרגום אותיותיה). לכן כאשר ידועה $f(t)$ ומעוניינים ב-$F(s_1)$ יש להתמיר $L[f(t)]$ ולהציב $s = s_1$. ולהיפך כאשר נתונה $F(s)$ ומעוניינים ב-$f(t_1)$ יש למצוא את $L^{-1}[F(s)]$ ולהציב $t = t_1$. **שני ערכים בלבד** ניתן למצוא ללא ביצוע ההתמרות: ב-$t = 0$ וב-$t \to \infty$.

משפט הערך ההתחלתי:

באם $f(t)$ ונגזרתה הראשונה ברות-התמרה, באם $L[f(t)] \stackrel{\Delta}{=} F(s)$, ובאם הגבול $\lim\limits_{s \to \infty} sF(s)$ קיים, אזי:

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s) \tag{6.8}$$

הוכחה: מ-(6.5) נקבל:

$$\lim_{s \to \infty} \int_0^\infty e^{-st} \frac{d}{dt}(f(t))dt = \lim_{s \to \infty} sF(s) - f(o) = 0$$

משפט הערך הסופי:

באם $f(t)$ ונגזרתה הראשונה ברות התמרה, ובאם הגבול $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$ קיים, אזי:

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to o} sF(s) \tag{6.9}$$

הוכחה: מ-(6.5) מקבלים:

$$\lim_{s \to o} \int_o^\infty e^{-st} \frac{d}{dt}(f(t))dt = \lim_{t \to \infty} f(t) - f(o) = \lim_{s \to o} sF(s) - f(o)$$

<u>הערה</u>: באם ל-$sF(s)$ קטבים s_i (- ערכי s עבורם $sF(s)$ מתבדרת, ראה פרק היציבות) כך ש-$Re(s_i) \geq 0$ (פרט ל-$s_i = 0$) ל-$f(\infty)$ אין ערך סופי ולא ניתן להשתמש במשפט.

הערה: במקרים בהם נתון $f(0^-)$ ולא $f(0^+)$ מגדירים

$$F_-(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt$$

הצורך בנ"ל קיים בבעיות פיזיקליות מסוימות בהן $f(0^-) \neq f(0^+)$ למשל כאשר $f(t)$ כוללת הלם, $\delta(t)$. במקרים אלו ידוע $f(0^-)$ בלבד.

ניתן להראות שבכל המשפטים וההתמרות ניתן להחליף את $f(0^+)$ ב-$f(0^-)$ ולקבל את $F_-(s)$ **פרט** למשפט הערך ההתחלתי. במשפט האחרון מקבלים תמיד את $f(0^+)$ דהיינו :

$$f(0^+) = \lim_{s \to \infty} sF_{\pm}(s)$$

6.1.7 <u>פתרון משואות דיפרנציאליות ליניאריות עם מקדמים קבועים בעזרת התמרת לפלס.</u>

דוגמא: נתונים המשואה הדיפרנציאלית ותנאי ההתחלה :

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = t \;\; ; \quad x(o) = 0 , \qquad \dot{x}(o) = 0$$

נתמיר המשואה (כאשר $L[x(t)] \stackrel{\Delta}{=} X(s)$).

$$\underbrace{s^2X(s) - sx(o) - \dot{x}(o)}_{L[\ddot{x}(t)]} + \underbrace{3[sX(s) - x(o)]}_{L[\dot{x}(t)} + 2X(s) = 1/s^2$$

נפתור המשואה האלגברית הנ"ל עבור $X(s)$ ונקבל:

$$X(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 3s + 2)}$$

$X(s)$ הינו הפתרון המותמר של המשואה הדיפרנציאלית. כדי למצוא את $x(t)$ ניתן היה להשתמש ב-$L^{-1}[X(s)]$ לפי (6.3) אבל מעשי ונוח יותר לפרק לשברים חלקיים (ראה להלן) ולהשתמש בטבלאות הכוללות התמרות של הפונקציות האלמנטריות. (טבלת התמרות נתונה בסעיף 6.6).

6.1.8 <u>פרוק לשברים חלקיים</u>

<u>דוגמא א'</u> - (שרשים נפרדים)

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2}$$

כדי למצוא את c_1 נכפול את המשואה ב-$s+1$ ונקבל:

$$F(s) \cdot (s+1) = \frac{1}{s+2} = c_1 + \frac{c_2(s+1)}{s+2}$$

עתה נציב $s = -1$ ונקבל:

$$F(s)(s+1)|_{s=-1} = \frac{1}{s+2}|_{s=-1} = c_1 = 1$$

כלומר

$$c_1 = F(s) \cdot (s+1)|_{s=-1} = 1$$

באופן דומה

$$c_2 = F(s) \cdot (s+2)|_{s=2} = -1$$

לכן

$$F(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} - L^{-1}\{\frac{1}{s+2}\} = e^{-t} - e^{-2t}$$

<u>דוגמה ב'</u> (שרשים חוזרים):

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{c_{11}}{s+1} + \frac{c_{12}}{(s+1)^2} + \frac{c_2}{s+2}$$

לפולינום המכנה ב-$F(s)$ שורש כפול (חוזר) ב-$s=-1$.

את c_2 נמצא כמקודם.

$$c_2 = F(s) \cdot (s+2)|_{s=-2} = 1$$

את c_{12} נמצא באופן דומה,

$$c_{12} = F(s) \cdot (s+1)^2|_{s=-1} = 1$$

את c_{11} לא נוכל למצוא כמקודם. לכן נפעל בדרך הבאה:

$$c_{11} = [\frac{d}{ds}(F(s) \cdot (s+1)^2)]|_{s=-1} = \frac{-1}{(s+2)^2}|_{s=-1} = -1$$

מכאן

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

ו-

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t}$$

<u>כללית:</u>

בהתמרות לפלס של משואות דיפרנציאליות ליניאריות עם מקדמים קבועים מקבלים:

$$Y(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_o}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_o} = \frac{\sum_o^n b_i s^i}{\sum_o^n a_i s^i}$$

בדרך כלל $b_n = 0$, (דרגת המונה קטנה מדרגת המכנה).

אם $b_n \neq 0$, יש תחילה לחלק את פולינום המתנה בפולינום המכנה ומתקבל (עבור $a_n = 1$):

$$Y(s) = b_n + \frac{\sum_o^{n-1} b'_i s^i}{\sum_o^n a_i s^i} \qquad (a_n = 1)$$

נפרק את המכנה לגורמים ונקבל:

$$Y(s) = \frac{\sum_o^n b_i s^i}{\prod_1^r (s+p_i)^{n_i}} = b_n + \frac{\sum_o^{n-1} b'_i s^i}{(s+p_1)^{n_1}(s+p_2)^{n_2}, \ldots, (s+p_r)^{n_r}}$$

כלומר לפולינום המכנה r שרשים שונים $-p_i$ וכל $-p_i$ חוזר n_i פעמים.

הפרוק לשברים חלקיים יהיה לכן:

$$Y(s) = b_n + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{C_{ik}}{(s+p_i)^k} = b_n + \frac{C_{11}}{s+p_1} + \frac{C_{12}}{(s+p_1)^2} + , \ldots , \frac{C_{1n_1}}{(s+p_1)^{n_1}} +$$

$$+ \frac{C_{21}}{s+p_2} + \ldots + \frac{C_{2n_2}}{(s+p_2)^{n_2}} + \ldots + \frac{C_{mr}}{(s+p_r)^{n_r}} \qquad (6.10)$$

כאשר

$$C_{ik} = \frac{1}{(n_i - k)!} \left[\frac{d^{n_i - k}}{ds^{n_i - k}} \{ (s+p_i)^{n_i} Y(s) \} \right]_{s=-P_i} \qquad (6.11)$$

נשתמש בטבלאות ונקבל:

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = b_n \delta(t) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{C_{ik}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-P_i t} \qquad (6.12)$$

6.1.9 <u>התמרת לפלס של וקטור או מטריצה</u>

אם $f(t)$ הינו וקטור פונקציות:

$$f(t)=\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

וכל $f_i(t)$ ברת-התמרה ומקיימת:

$$f_i(t)=0 \qquad t\le 0$$

ו- $$|f_i(t)|<Me^{\alpha t} \qquad t>0$$

אזי לכל $f_i(t)$ קיימת התמרת לפלס $F_i(s)$ המתכנסת ב-$\alpha < Re(s)$, והתמרת $f(t)$ תהיה לכן:

$$L[f(t)]=F(s)=\begin{pmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \\ \vdots \\ F_n(s) \end{pmatrix} \tag{6.14}$$

בדומה, אם $f(t)$ היא מטריצה $r \times m$ של פונקציות $f_{ij}(t)$ המקיימות התנאים לעיל אזי אם:

$$f(t)=\begin{pmatrix} f_{11}(t) \dots f_{1m}(t) \\ \vdots \\ f_{r1}(t) \quad f_{rm}(t) \end{pmatrix}$$

נקבל:

$$L[f(t)]=F(s)=\begin{pmatrix} F_{11}(s) \dots F_{1m}(s) \\ \vdots \\ F_{r1}(s) \dots F_{rm}(s) \end{pmatrix} \tag{6.15}$$

6.1.10 <u>דוגמאות</u>

א. נתון כי $L[f(t)]=F(s)$ מצא את

$$L[\int_{t-\alpha}^{t} f(u)du]$$

כאשר α קבוע וחיובי.

פתרון:

נסמן:

$$\int_0^t f(u)du = g(t)$$

לכן לפי (6.7) :

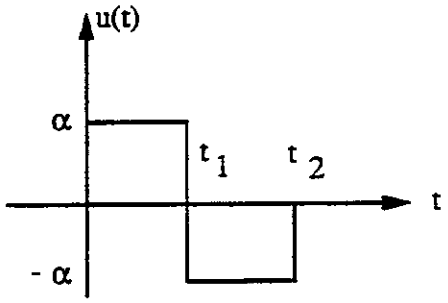
$$L[g(t)] = \frac{F(s)}{s} \stackrel{\Delta}{=} G(s)$$

$$\int_{t-\alpha}^{t} f(u)du = \int_0^t f(u)du - \int_0^{t-\alpha} f(u)du = g(t) - g(t-\alpha)$$

ומכאן:

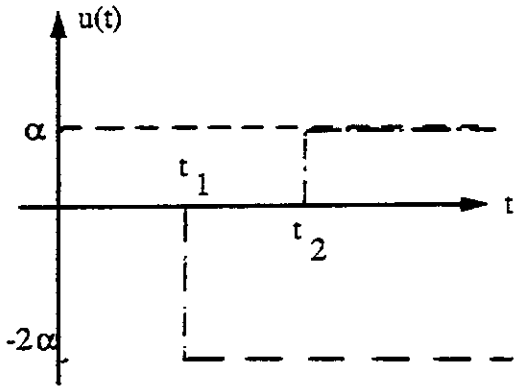
$$L\left[\int_{t-\alpha}^{t} f(u)du\right] = G(s) - e^{-s\alpha}G(s) = \frac{F(s)}{s}(1-e^{-s\alpha})$$

ב. מצא את התמרת לפלס של הפונקציה $u(t)$ המוראית בציור.



פתרון:

את הפונקציה $u(t)$ ניתן לפצל לשלש פונקציות מדרגה כבציור הבא:



מכאן:

$$u(t) = \alpha \cdot 1(t) - 2\alpha \cdot 1(t-t_1) + \alpha \cdot 1(t-t_2)$$

ובשמוש בסעיף 6.1.5 ו-(6.4) נקבל:

$$u(s) = \frac{\alpha}{s} - 2\frac{\alpha}{s}e^{-st_1} + \frac{\alpha}{s}e^{-st_2} = \frac{\alpha}{s}(1 - 2e^{-st_1} + e^{-st_2})$$

הערה: ניתן כמובן גם למצוא את $u(s)$ ישירות מהגדרת התמרת לפלס:

$$u(s) = \int_0^{t_1} \alpha e^{-st}dt - \int_{t_1}^{t_2} \alpha e^{-st}dt$$

ג. נתונות שתי הפונקציות הבאות:

$$1)\quad f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{at} & t \geq 0 \end{cases} \qquad 2)\quad f(t) = \begin{cases} -e^{at} & t \leq 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

$$a > 0$$

מצא את התמרת לפלס הדו-צדדית של שתי פונקציות אלו.

פתרון:

פונקציה 1.

$$F_{II}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t}dt = \frac{1}{s-a} \quad ; \qquad Re(s) > a$$

פונקציה 2.

$$F_{II}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{at}e^{-st})\, dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{(a-s)t}dt = \frac{1}{s-a} \quad ; \qquad Re(s) < a$$

לכאורה לשתי פונקציות שונות אותה התמרה. ההבדל, כמובן, נעוץ בתחומי התכנסות ההתמרות. לכן על מנת לזהות את הפונקציה שהתמרתה הדו-צדדית היא $\frac{1}{s-a}$ יש לדעת את תחום ההתכנסות.

6.2 <u>פתרון משואות המצב באמצעות התמרת לפלס (מערכות רציפות)</u>

6.2.1 נתונה המערכת הסטציונרית באמצעות הממוש:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{6.16}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{6.17}$$

בהתאם ל-6.1.8 נגדיר את התמרות הוקטורים $x(t)$, $u(t)$ ו-$y(t)$ כ:

$$X(s) \stackrel{\Delta}{=} L[x(t)]\,, \quad U(s) \stackrel{\Delta}{=} L[u(t)]\,, \quad Y(s) \stackrel{\Delta}{=} L[y(t)]$$

נתמיר את (6.16) ו-(6.17) ונקבל:

$$sX(s) - x(o) = AX(s) + BU(s) \tag{6.18}$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \tag{6.19}$$

מ-(6.18) נקבל:

$$X(s) = [sI-A]^{-1}\, x(o) + (sI-A)^{-1}BU(s) \tag{6.20}$$

ומ-(6.19) בהצבת (6.20) נקבל:

$$Y(s) = C(sI-A)^{-1}\, x(o) + (C(sI-A)^{-1}B+D)U(s) \tag{6.21}$$

משואות (6.20) ו-(6.21) הן הפתרון המותמר של משואות המצב והיציאה.

את $x(t)$ ואת $y(t)$ ניתן למצוא על ידי :

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] \;\; ; \;\; y(t) = L^{-1}[Y(s)]$$

6.2.2 <u>שיטה נוספת לחישוב מטריצת המעבר</u> $\phi(t) = e^{At}$.

ההתמרה ההפוכה של (6.20) תתן:

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}\, x(o) + L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\, BU(s)\} \tag{6.22}$$

מהשוואת (6.22) עם הפתרון שקבלנו בציר הזמן :

$$x(t) = e^{At}\, x(o) + \int_{o}^{t} e^{A(t-\tau)}\, Bu(\tau)d\tau \tag{6.23}$$

מתקבל ש:

$$e^{At} = L^{-1}\,[(sI-A)^{-1}] \tag{6.24}$$

<u>דוגמא</u>: מצא e^{At} עבור :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$sI - A = \begin{pmatrix} s & 2 \\ -1 & s+3 \end{pmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{pmatrix}}{s^2+3s+2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+1} & \frac{2}{s+2} - \frac{2}{s+1} \\ -\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$$

הביטויים באגף הימני של השויון האחרון מתקבלים מפרוק ארבעת אברי המטריצה לשברים חלקיים.

$$e^{At} = L[sI-A)^{-1}] = \begin{pmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-t} & 2(e^{-2t} - e^{-t}) \\ -e^{-2t} + e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{pmatrix}$$

6.2.3 מציאת התגובה לכניסה (פתרון מאולץ)

מהשואת (6.21) עם (6.23) ושמוש ב-(6.17) נקבל:

$$y(t) = C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) + Du(t) = L^{-1}\{[C(sI-A)^{-1}B + D]U(s)\} \tag{6.25}$$

דוגמא: נתונה המערכת:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (\,2 \quad 0\,)\, x$$

מצא $y(t)$ עבור כניסת מדרגה יחידתית $(u(s) = 1/s)$ $(x_0 = 0)$

פתרון:

$$(sI-A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} s+5 & 1 \\ -4 & s \end{pmatrix}}{(s+1)\ (s+4)} = \frac{Adj(sI-A)}{\det(sI-A)}$$

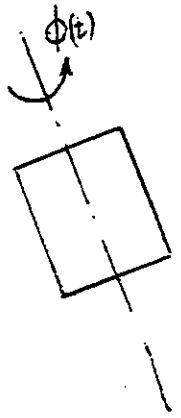
$$C\ Adj\,(sI-A)B = (2 \quad 0)\begin{pmatrix} s+5 & 1 \\ -4 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$C(sI-A)^{-1}BU(s) = \frac{2}{(s+1)(s+4)}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1/2}{s} - \frac{2/3}{s+1} + \frac{1/6}{s+4}$$

$$y(t) = L^{-1}\{C(SI-A)^{-1}BU(s)\} = (\frac{1}{2} - \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-4t})1(t)$$

6.2.4 דוגמאות

א. (בוחן אמצע סמסטר - חורף תשמ"ג)



חללית בעלת מומנט אינרציה J סובבת סביב ציר הסימטריה שלה.

המקום הזויתי של החללית בזמן t נתון על ידי $\phi(t)$

(ראה ציור). באמצעות סילוני גז ניתן להפעיל על

החללית מומנט סבוב $\mu(t)$. מומנט זה משמש כמשתנה כניסה.

החכוך קטן וניתן להזנחה. משתנה היציאה הוא המקום הזויתי.

I. בחר את המקום הזויתי $\phi(t)$ ואת מהירותה הזויתית של החללית $\dot{\phi}(t)$ כמשתני מצב. הראה שמשוואות המצב ומשואת היציאה של המערכת נתונות על ידי:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} \mu(t) \qquad \beta = 1/J$$

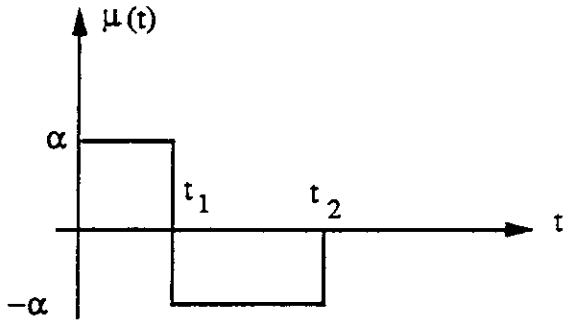
$$y(t) = (1 \quad 0)\, x(t)$$

II. חשב את מטריצת המעבר ואת תגובת ההלם של המערכת.

III. הנח שבזמן $t=0$ נמצאת החללית במנוחה, כלומר $x_o = \begin{pmatrix} \phi_o \\ 0 \end{pmatrix}$.

מעוניינים לשנות את המקום הזויתי מזוית ϕ_o לזוית ϕ_2 בפרק זמן t_2 שלאחריו תמצא החללית במנוחה. (כלומר $x(t_2) = \begin{pmatrix} \phi_2 \\ 0 \end{pmatrix}$). ניתן להפעיל שני סילוני גז המפעילים מומנטים בכוונים הפוכים זה לזה כך שמשתנה הכניסה $\mu(t)$ עשוי לקבל אך ורק שלושה ערכים: α , 0 , $-\alpha$ (α - קבוע). אם מפעילים את הסילונים כמתואר בציור חשב את הזמנים t_1 ו-t_2 כך שהחללית תשנה את הזוית מ-ϕ_o ל-ϕ_2 ותשאר במצב זה.

בטא תשובתך באמצעות ϕ_o , ϕ_2 ו-β.



פתרון:

I. משואת התנועה:

$$J\ddot{\phi} = \mu$$

ממוש:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \phi \\ x_2 &= \dot{\phi} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \ddot{\phi} = \dot{x}_2 &= \frac{1}{J}\mu \end{aligned}$$

1. כתוב ממוש במרחב המצב למערכת הנ"ל ומצא את $y(t)$ עבור $t>0$ אם נתון :

$$z(t)=t\cdot 1(t)\,,\quad \dot{y}(o)=-1\,,\quad y(o)=2.5$$

2. פתור את הנ"ל ישירות באמצעות התמרת לפלס של המשואה הדיפרנציאלית המתארת את דינמיקת המערכת.

פתרון:

משואת התנועה:

$$m\ddot{y}(t)+c\dot{y}(t)+(k_1+k_2)y(t)=c\dot{z}(t)+k_1z(t)$$

$$\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+10y(t)=2\dot{z}(t)+5z(t)$$

עבור $u\overset{\Delta}{=}z(t)$ מתקבל הממוש הבא בצורה המלווה:

$$x(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -10 & -2\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u(t)$$

$$y(t)=[\,5\quad 2\,]\;x(t)$$

נחשב את $x(o)$ מתוך תנאי ההתחלה על y .

$$y(o)=Cx(o)$$

$$\dot{y}(o)=C\dot{x}(o)=CAx(o)+CBu(o)$$

$u(o)=0$ ומתקבלות שתי המשואות הבאות :

$$2.5=5x_{10}+2x_{20}$$

$$-1=-20x_{10}+x_{20}$$

כאשר :

$$x(o)=\begin{pmatrix}x_{10}\\ x_{20}\end{pmatrix}$$

מפתרון משואות אלו מתקבל $x(o)=\begin{bmatrix}0.1\\ 1\end{bmatrix}$.

ניתן גם לחשב את $x(o)$ בשיטה שפיתחנו בפרק 5 (ראה (5.36)) :

$$x(o)=O^{-1}Y(o)-O^{-1}TU(o)\,;\quad O=\begin{pmatrix}C\\ CA\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -20 & 1\end{pmatrix};\quad O^{-1}=\frac{1}{45}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 20 & 5\end{pmatrix}$$

במקרה זה היות ו-$U(o)=0$ נקבל $TU(o)=0$ ולכן :

$$x(o) = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 20 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2.5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נציב התוצאות הנ"ל עם $U(s) = \frac{1}{s^2}$ למשואה (6.21) ונקבל:

$$Y(s) = [5 \;\; 2]\begin{bmatrix} s & -1 \\ 10 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix} + [5 \;\; 2]\begin{bmatrix} s & -1 \\ 10 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s^2} =$$

$$= \frac{2.5s+4}{s^2+2s+10} + \frac{2s+5}{(s^2+2s+10)s^2}$$

לאחר פרוק הבטוי האחרון לשברים חלקיים וסדור המכנה בצורה מתאימה מתקבל:

$$Y(s) = \frac{0.5}{s^2} + \frac{0.1}{s} + \frac{2.4(s+1)}{(s+1)^2+3^2} + \frac{0.9}{(s+1)^2+3^2}$$

ובהתמרה הפוכה:

$$y(t) = 0.5t + 0.1 + 2.4e^{-t}\cos 3t + 0.3e^{-t}\sin 3t \qquad t \geq 0$$

2. התמרת המשוואה הדיפרנציאלית היא:

$$s^2Y(s) - sy(o) - \dot{y}(o) + 2sY(s) - 2y(o) + 10Y(s) =$$

$$= 2sZ(s) - 2z(o) + 5Z(s)$$

ומכאן בהצבת $Z(s) = 1/s^2$ מתקבל:

$$Y(s) = \frac{2.5s+4}{s^2+2s+10} + \frac{2s+5}{(s^2+2s+10)s^2}$$

זהו כמובן אותו בטוי כפי שהתקבל בשיטה הקודמת והמשך הפתרון הוא זהה.

6.3 התמרת Z (Z-Transform)

6.3.1 התמרת Z הינה העתקה ליניארית של פונקציה בדידה $f(k)$ $(k = -\infty, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ למשור הקומפלקסי z באופן הבא:

א. התמרה דו-צדדית:

$$\underset{II}{F}(z) = \underset{II}{Z}[f(k)] = \sum_{-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k} \qquad (6.26)$$

ב. התמרה חד-צדדית:

$$F(z) = Z[f(k)] = \sum_{o}^{\infty} f(k)z^{-k} \qquad (6.27)$$

אם נתונה הפונקציה הבדידה $f(kT)$ תהיינה התמרות z מוגדרות לפי :

$$F_{(II)}(z) = Z_{(II)}[f(kT)] = \sum_{0\,(-\infty)}^{\infty} f(kT)z^{-k} \qquad (6.27)'$$

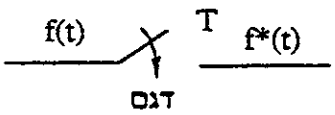
רק לפונקציות בדידות עבורם הסכומים ב-(626) וב-(6.27) מתכנסים יש התמרת z .

ערכי z עבורם הסכומים מתכנסים נקראים **תחום התכנסות** ההתמרה.

עבור (6.26) התחום בדרך כלל נתון על ידי $r < |z| < R$, ועבור (6.27) התחום בדרך כלל נתון על ידי $|z| > r$.

6.3.2 <u>התמרת Z של פונקציות רציפות דגומות</u>

תאור סכימטי של פעולת הדגימה, בפרקי זמן קבועים, של פונקציה רציפה $f(t)$ נתון בציור.



ביציאה מהדגם מתקבל טור של פולסים (או מספרים) אשר ערכיו הם: ...f(2T), f(T), f(o), f(-T),... וכו', כאשר T הוא אינטרוול הדגימה.

הפונקציה הדגומה המופיעה ביציאה מהדגם מסומנת בציור ב-$f^*(t)$, ולה ערכים בדידים במידה ומשך הדגימה קטן מאד יחסית לאינטרוול הדגימה. את פעולת הדגם בתנאים אלו ניתן לתאר מתמטית כטור אינסופי של הלמים בעצמת יחידה. הלמים אלו מופיעים בזמני הדגימה. לכן:

$$f^*(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\,\delta(t-nT) =$$

$$= \ldots + f(-T)\,\delta(t+T) + f(o)\,\delta(t) + f(T)\,\delta(t-T) + \ldots \qquad (6.28)$$

אם נשתמש בהתמרת לפלס של פונקצית הלם ובמשפט ההזזה תתקבלנה התמרות לפלס הדו-צדדית והחד-צדדית של (6.28),

$$F^*_{II}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-nTs} \qquad (6.29)$$

$$F^*(s) = \sum_{n=o}^{\infty} f(nT)e^{-nTs} \qquad (6.30)$$

אם נציב $z = e^{+Ts}$ ב-(76.29) וב-(6.30) נקבל את (6.27)' .

מסקנה: ניתן לקבל את התמרת Z של פונקציה דגומה על ידי הצבת:

$$e^{Ts} = z$$

(6.31) או:

$$s = \frac{1}{T} \ln z$$

בהתמרת לפלס של $f^*(t)$.

6.3.3 <u>שיטות לקבלת התמרת Z</u>

א. מתוך ההגדרה (שמוש ב-(6.26) , (6.27) או (6.29) , (6.30)).

ב. על ידי משפט השאריות:

$$F(z) = \sum \underset{\substack{\text{בקטבים של} \\ F(s)}}{\text{residue}} \left[F(s) \frac{1}{1 - e^{Ts} z^{-1}}\right] \tag{6.32}$$

כאשר $F(s)$ הינה התמרת לפלס של $f(t)$.

לא נרחיב במסגרת קורס זה את הטיפול בשיטה זו.

וכמובן:

ג. בעזרת טבלאות התמרת Z , (טבלת התמרות נתונה בסעיף 6.6).

6.3.4 <u>דוגמאות בשיטה אי</u> (התמרות חד צדדיות)

בשיטה זו ניתן לקבל התמרות של פונקציות פשוטות. מציבים את הפונקציה הבדידה $f(k)$ בהגדרת ההתמרה (6.26) או (6.27) ומנסים למצוא ביטוי סגור להתמרה.

א. פונקצית הלם בדידה בעצמת p $(f(k) = p\delta(k))$.

$$f(k) = \begin{cases} p & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

נציב ב-(6.27) ונקבל:

$$F(z) = \sum_{0}^{\infty} f(k)\, z^{-k} = p$$

ב. פונקצית מדרגה $f(k) = 1 \quad k = 0,1,2,...$

$$F(z) = \sum_{k=o}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots = \frac{1}{1 - z^{-1}} \qquad |z^{-1}| < 1$$

ג. פונקצית אקספוננט - $f(k) = e^{-ak}$.

$$F(z) = \sum_{o}^{\infty} e^{-ak} z^{-k} = 1 + e^{-a} z^{-1} + (e^{-a} z^{-1})^2 + \ldots$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-a} z^{-1}} \qquad |e^{-a} z^{-1}| < 1$$

$$|z| > |e^{-a}|$$

הערה: אלו דגמנו את $f(t) = e^{-at}$ באינטרולים של T היינו מקבלים:

$$f(nT) = e^{-anT} \qquad n = 0,1,....$$

לכן התמרת Z של $f(nT)$ תהיה:

$$F(z) = \sum_{n=o}^{\infty} e^{-anT} z^{-n} = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \cdot \quad |z| > |e^{-aT}|$$

ד. פונקציות טריגונומטריות - $f(t) = e^{+j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$

$$f(nT) = e^{+ nj\omega T} = \cos(n\omega T) + j \sin(n\omega T) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$F(z) = \sum_{o}^{\infty} e^{+ nj\omega T} z^{-n} = 1 + e^{j\omega T} z^{-1} + (e^{j\omega T} z^{-1})^2 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{j\omega T}} =$$

$$= \frac{z}{(z - \cos \omega T) - j \sin \omega T} \times \frac{z - \cos \omega T + j \sin \omega T}{(z - \cos \omega T) + j \sin \omega T} =$$

$$= \frac{z(z - \cos \omega T) + jz \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

ולכן:

$$Z(\cos(n\omega T)) = \frac{z(z - \cos\ \omega T)}{z^2 - 2z\cos\ \omega T + 1}$$

$$Z(\sin\ (n\omega T)) = \frac{z\sin\ \omega T}{z^2 - 2z\cos\ \omega T + 1}$$

ה. $f(k) = \alpha^k$

$$F(z) = \sum_{o}^{\infty} \alpha^k z^{-k} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z}{z - \alpha} \qquad (|z| > \alpha)$$

6.3.5 התמרת Z ההפוכה. (Inverse Z Transform)

הבעיה: נתון $F(z)$.

יש למצוא $f(n)$ או $f(nT)$.

שלוש דרכים לביצוע ההתמרה ההפוכה:

א. פתוח לטור חזקות.

ב. פתוח לשברים חלקיים ושמוש בטבלאות.

ג. אינטגרל האנורסיה.

א. פתוח לטור חזקות.

אם :

$$F(z) = \frac{a_o + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + , \ldots , + a_n z^{-n}}{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \ldots} \qquad (6.33)$$

נחלק ונקבל:

$$F(z) = f_o + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + ,\ldots \qquad (6.34)$$

וכיוון שלפי (6.27)

$$F(z) = \sum_{o}^{\infty} f(k) z^{-k} = f(o) + f(1) z^{-1} + f(2) z^{-2} + , \ldots$$

יוצא שהמקדם של z^{-k} הוא $f(k)$.

דוגמא:

$$F(z)=\frac{2z}{(z-2)(z-1)^2}=\frac{2z^{-2}}{1-4z^{-1}+5z^{-2}-2z^{-3}}=$$

$$=2z^{-2}+8z^{-3}+22z^{-4}+\ldots$$

ומכאן:

$$f(o)=f(1)=0$$

$$f(2)=2\,;\quad f(3)=8\;;\quad f(4)=22$$

חסרון השיטה שאינה נותנת ביטוי כללי ל-$f(k)$.

ב. פתוח לשברים חלקיים.

מפרקים את $\frac{F(z)}{z}$ לשברים חלקיים ומבצעים ההתמרה ההפוכה לפי טבלאות.

<u>דוגמא:</u>

$$F(z)=\frac{2z}{(z-2)(z-1)^2}$$

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{2}{(z-2)(z-1)^2}=\frac{2}{z-2}-\frac{2}{(z-1)^2}-\frac{2}{z-1}$$

לכן

$$F(z)=\frac{2z}{z-2}-\frac{2z}{(z-1)^2}-\frac{2z}{z-1}$$

ומכאן:

$$f(nT)=2\cdot 2^n\ -\ 2\cdot n\ -\ 2\cdot 1^n \qquad n\geq 0$$

ג. שמוש באינטגרל האנורסיה.

ניתן להוכיח ש-

$$f(nT)=\frac{1}{2\pi j}\oint F(z)\ z^{n-1}dz \tag{6.35}$$

כאשר המסלול הסגור בתוך אזור ההתכנסות של $F(z)$.

לא נרחיב הטפול בשיטה זו בקורס זה.

6.3.6 <u>משפטי התמרת Z</u>

א. ליניאריות - באם $Z[f_1(nT)] \stackrel{\Delta}{=} F_1(z)$ ו- $Z[f_2(nT)] \stackrel{\Delta}{=} F_2(z)$

אזי :

$$Z[\alpha f_1(nT) + \beta f_2(nT)] = \alpha F_1(z) + \beta F_2(z) \tag{6.36}$$

ב. הזזה ממשית - באם $Z[f(kT)] \stackrel{\Delta}{=} F(z)$ אזי :

$$Z[f(kT - nT)] = z^{-n}F(z) + \sum_{k=0}^{n-1} f(kT - nT)z^{-k} \qquad (n > 0) \tag{6.37}$$

$$Z[f(kT + nT)] = z^{n}F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{n-k} \qquad (n > 0) \tag{6.38}$$

הוכחה:

לפי הגדרה (6.27):

$$Z[f(kT - nT)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT - nT)z^{-k} = z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT - nT)z^{-(k-n)} =$$

$$= z^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} f(kT - nT)z^{-(k-n)} + \sum_{k=0}^{n-1} f(kT - nT)z^{-k}$$

$$= z^{-n}F(z) + \sum_{k=0}^{\infty} f(kT - nT)z^{-k}$$

$$Z[f(kT + nT)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT + nT)z^{-k} = z^{n} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT + nT)z^{-(k+n)}$$

$$= z^{n}[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k}]$$

<u>הערות:</u>

1. אם נתון כח $f(kT) = 0$ עבור $k < 0$ תצטמצם (6.37) ל-

$$Z[f(kT - nT)] = z^{-n}F(z) \tag{6.37'}$$

2. הפעלת (6.37) במקרים n=1 ו-n=2 תתן

$$n = 1 \qquad Z[f(kT-T)] = z^{-1}F(z) + f(-T)$$

$$n = 2 \qquad Z[f(kT-2T)] = z^{-2}F(z) + f(-2T) + f(-T)z^{-1}$$

ובדומה (6.38) תתן:

$$n = 1 \qquad Z[f(kT+T)] = zF(z) - f(o)z$$

$$n = 2 \qquad Z[f(kT+2T)] = z^2F(z) - f(o)z^2 - f(T)z$$

ג. <u>משפט הערך ההתחלתי</u> : אם $Z[f(nT)] \overset{\Delta}{=} F(z)$ ובאם $\lim_{z \to \infty} F(z)$ קים אזי :

$$\lim_{n \to 0} f(nT) = \lim_{z \to \infty} F(z) \tag{6.39}$$

ד. <u>משפט הערך הסופי</u> : אם $Z[f(nT)] \overset{\Delta}{=} F(z)$ ובאם הגבול $\lim_{n \to \infty} f(nT)$ קיים אזי:

$$\lim_{n \to \infty} f(nT) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1})\, F(z) \tag{6.40}$$

<u>הערה</u>: הגבול $\lim_{nT \to \infty} f(nT)$ לא קיים באם ל-$F(z)$ קטבים (ראה פרק היציבות) מחוץ או על מעגל היחידה במשור z (פרט לקוטב אחד ב-$z=1$).

ה. <u>משפט ההזזה הקומפלקסית</u> : אם $Z[f(nT)] \overset{\Delta}{=} F(z)$.

אזי :

$$Z[e^{\pm anT} f(nT)] = F(z^{\mp nT}) \tag{6.41}$$

6.3.7 <u>התמרת Z של וקטור או מטריצת פונקציות בדידות</u>

בדומה לסעיף 6.1.8, אם $f(nT)$ הינה מטריצת פונקציות $f_{ij}(nT)$ ולכל $f_{ij}(nT)$ קיימת התמרת Z כך ש-

$$Z[f_{ij}(nT)] \overset{\Delta}{=} F_{ij}(z)$$

אזי :

$$Z[f(nT)] = Z\begin{pmatrix} f_{11}(nT), \ldots, f_{1m}(nT) \\ \vdots \\ f_{r1}(nT), \ldots, f_{rm}(nT) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}(z), \ldots, F_{1m}(z) \\ \vdots \\ F_{r1}(z), \ldots, F_{rm}(z) \end{pmatrix} = F(z) \tag{6.42}$$

6.3.8 <u>פתרון משואות הפרשים ליניאריות סטציונריות באמצעות התמרת Z.</u>

נתונה משואת ההפרשים הבאה :

$$y(k) - 3y(k-1) + 2y(k-2) = 2u(k-1) - 2u(k-2) \tag{6.43}$$

כאשר:

$$u(k)=\begin{cases} k & k\ge 0 \\ 0 & k<0 \end{cases} \qquad y(k)=\begin{cases} 1 & k=-1 \\ 2 & k=-2 \\ 0 & k<-2 \end{cases}$$

מצא $y(k)$ עבור $k\ge 0$.

פתרון :

$$Z(u(k)) = Z(k) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

התמרת (6.43) לפי משפט ההזזה , (6.37) , תתן :

$$Z\{y(k) - 3y(k-1)+2y(k-2)\} = Z\{2u(k-1)-2u(k-2)\}$$

$$Y(z) - 3[z^{-1}Y(z)+y(-1)] + 2[z^{-2}Y(z) + y(-2)+y(-1)z^{-1}] = 2z^{-1}u(z) - 2z^{-2}u(z)$$

או:

$$Y(z)\ \{1-3z^{-1}+2z^{-2}\} - 3y(-1)+y(-2)+2y(-1)z^{-1} = 2u(z)\ (z^{-1} - z^{-2})$$

ומכאן (בהצבת תנאי התחלה וכניסה)

$$Y(z) = -\frac{1+2z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}} + \frac{2z^{-1}(1-z^{-1})}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}\cdot\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

ולאחר צמצומים

$$Y(z) = -\frac{z(z+2)}{(z-1)(z-2)} + \frac{2z}{(z-1)^2(z-2)}$$

פרוק לשברים חלקיים וכינוס

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{2z}{(z-1)^2} - \frac{2z}{z-2}$$

ולכן

$$y(k) = 1 - 2\cdot 2^k - 2k \qquad k\ge 0$$

6.4 פתרון משואות המצב הבדידות באמצעות התמרת Z

6.4.1 נתונה המערכת הסטציונרית הבדידה:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$x(o)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \tag{6.44}$$

נגדיר:

$$X(z) \stackrel{\Delta}{=} Z[x(k)]$$

$$U(z) \stackrel{\Delta}{=} Z[u(k)]$$

$$Y(z) \stackrel{\Delta}{=} Z[y(k)] \tag{6.45}$$

נתמיר את (6.44) ונקבל:

$$zX(z) - zx(o) = AX(z)+BU(z) \tag{6.46}$$

$$Y(z) = CX(z) + DU(z) \tag{6.47}$$

מחלוץ $X(z)$ ב-(6.46) נקבל:

$$X(z) = (zI-A)^{-1} zx(o) + (zI-A)^{-1} BU(z) \tag{6.48}$$

ו-

$$Y(z) = C(zI-A)^{-1} zx(o) + [C(xI-A)^{-1}B + D]\, U(z) \tag{6.49}$$

משוואות (6.48) ו-(6.49) הן הפתרון המוותמר של (6.44).

מידיעת $X(z)$ או $Y(z)$ ניתן על ידי התמרה הפוכה לקבל $x(k)$ ו-$y(k)$ בהתאמה.

6.4.2 שיטה נוספת לחישוב מטריצת המעבר $\phi(k) = A^k$:

ההתמרה ההפוכה של (6.48) תתן:

$$x(k) = Z^{-1}[(zI-A)^{-1}z]x(o)+Z^{-1}[(zI-A)^{-1}BU(z)] \tag{6.50}$$

בפתרון בתחום הזמן קבלנו :

$$x(k) = A^k x(o) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} Bu(j) \tag{6.51}$$

לכן:

$$A^k = Z^{-1}[(zI-A)^{-1}z] \tag{6.52}$$

<u>דוגמא</u>: מצא A^k עבור

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$zI - A = \begin{pmatrix} z & -1 \\ 6 & z+5 \end{pmatrix}$$

$$(zI - A)^{-1}z = \begin{pmatrix} \frac{z(z+5)}{(z+2)\ (z+3)} & \frac{z}{(z+2)\ (z+3)} \\ \frac{-6z}{(z+2)\ (z+3)} & \frac{z^2}{(z+2)\ (z+3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3z}{z+2} - \frac{2z}{z+3} & \frac{z}{z+2} - \frac{z}{z+3} \\ -6\left(\frac{z}{z+2} - \frac{z}{z+3}\right) & \frac{-2z}{z+2} + \frac{3z}{z+3} \end{pmatrix}$$

ומכאן:

$$A^k = \begin{pmatrix} 3(-2)^k - 2(-3)^k & (-2)^k - (-3)^k \\ -6((-2)^k - (-3)^k) & -2(-2)^k + 3(-3)^k \end{pmatrix}$$

<u>דוגמא</u>: מצא A^n עבור

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$(zI - A)^{-1}z = \begin{pmatrix} z & -1 \\ 0 & z \end{pmatrix}^{-1} z = \begin{pmatrix} 1 & z^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = Z^{-1}\begin{Bmatrix} 1 & z^{-1} \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta(n) & \delta(n-1) \\ 0 & \delta(n) \end{bmatrix}$$

הצבת $n = 0$ תתן $A^o = I$

הצבת $n = 1$ תתן $A^1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ועבור $n \geq 2$ נקבל $A^n = 0$

מטריצה כזו המקימת $A^n = 0$ עבור n כלשהוא $(n>1)$ נקראת **נילפוטנטית**.

6.4.3 <u>מציאת פתרון מאולץ באמצעות התמרת Z</u>

מהשואת (6.50) עם (6.51) נקבל:

$$Z^{-1}[(zI - A)^{-1}BU(z)] = \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1}Bu(j) \qquad (6.53)$$

דוגמא: נתונה מערכת על ידי משואת הפרשים:

$$y(k+2) + 5y(k+1)+6y(k) = u(k)$$

כאשר:

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

מצא $y(k)$ עבור $k \geq 0$ אם נתון: $y(o)=y(1) = 0$

פתרון: ממוש בצורה המלווה נותן:

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = (1 \quad 0)\ x(k).$$

$$\left.\begin{aligned} y(k) &= x_1(k) \\ y(k+1) &= x_1(k+1) = x_2(k) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1(o) &= 0 \\ x_2(o) &= 0 \end{aligned}$$

מ-(6.49) נקבל: $Y(z) = C(zI\text{-}A)^{-1} BU(z)$

$$C(zI-A)^{-1}B = (1 \quad 0) \frac{\begin{pmatrix} z+5 & 1 \\ -6 & z \end{pmatrix}}{(z+2)\ (z+3)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{(1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}}{(z+2)(z+3)} =$$

$$= \frac{1}{(z+2)(z+3)}$$

היות ו-

$$Uz) = \frac{z}{z-1}$$

יהיה:

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)(z+3)}$$

פרוק לשברים חלקיים:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1/12}{z-1} + \frac{-1/3}{z+2} + \frac{1/4}{z+3}$$

התמרה הפוכה:

$$y(k) = \frac{1}{12} - \frac{1}{3}(-2)^k + \frac{1}{4}(-3)^k \qquad k \geq 0$$

6.4.4 <u>דוגמא</u>

בניסוי מסויים נלקחות שתי סדרות בדידות של מדידות $u_1(k)$ ו-$u_2(k)$ $(k = 0,1,2,...)$. מתוך סדרות אלו מחשבים את ערכי הסדרה $y(k)$. לצורך ביצוע החישוב בזמן אמיתי נבנה אלגוריתם (שגרת מחשב) המשתמש בשתי סדרות של משתני עזר $x_1(k)$ ו-$x_2(k)$ הבא:

$$x_1(k+1) = 1.5x_1(k) - 1.4x_2(k) + 2u_1(k) + u_2(k)$$

$$x_2(k+1) = 0.5x_1(k) - 0.2x_2(k) + u_1(k) - u_2(k)$$

$$y(k) = x_1(k) - x_2(k)$$

א. כתוב את האלגוריתם הנ"ל במתכונת משואות מצב (6.44).

ב. כתוב את הקשר בין $Y(z)$ ובין $U(z)$,

$$U(z) \triangleq Z\begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{pmatrix}$$

במתכונת של משואה (6.49).

ג. אם נתון כי $x_1(o) = x_2(o) = 0$, $u_1(k) = 0$ ו-$u_2(k) = 1$ עבור $k \geq 0$ מצא את $y(k)$ לכל $k \geq 0$.

ד. מצא אלגוריתם אחר המשתמש במשתני עזר (מצב) אחרים $x'_1(k)$ ו-$x'_2(k)$ אשר מביא לאותו קשר בין הסדרות $u_1(k)$, $u_2(k)$ לסדרה $y(k)$.

פתרון:

א. נגדיר:

$$x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

ו-

$$u(k) = \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{pmatrix}$$

ונקבל:

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1.5 & -1.4 \\ 0.5 & -0.2 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} U(k)$$

$$y(k) = (1 \quad -1)\, x(k)$$

ב. הקשר בין $Y(z)$ ו-$U(z)$ עבור ממוש במרתב המצב נתון על ידי:

$$Y(z) = C(zI-A)^{-1} BU(z) = G(z)U(z)$$

$$G(z) = (1 \quad -1)\frac{\begin{pmatrix} z+0.2 & -1.4 \\ 0.5 & z-1.5 \end{pmatrix}}{z^2-1.3z+0.4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{(z-0.5 \quad 2z-0.4)}{(z-0.5)(z-0.8)} =$$

$$= \left(\frac{1}{z-0.8} \quad \frac{2z-0.4}{(z-0.5)(z-0.8)}\right)$$

ג. היות ו-

$$U(z) = Z\begin{pmatrix} 0 \\ 1(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z/(z-1) \end{pmatrix}$$

נקבל :

$$Y(z) = G(z)\,U(z) = \left(\frac{1}{z-0.8} \quad \frac{2z-0.4}{(z-0.5)(z-0.8)}\right)\frac{\begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}}{z-1} =$$

$$= \frac{(2z-0.4)z}{(z-0.5)(2-0.8)(z-1)}$$

נפרק לשברים חלקיים ונקבל:

$$Y(z) = \frac{16z}{z-1} + \frac{4z}{z-0.5} - \frac{20z}{z-0.8}$$

ומהתמרה הפוכה מתקבל:

$$y(k) = 16 + 4 \cdot 0.5^k - 20 \cdot 0.8^k \qquad k \geq 0$$

ד. כל טרנספורמציה סימילרית של משתני המצב אינה משנה את הקשר כניסה-יציאה. נבחר x' המקיים $x = Tx'$ כאשר $T_{2\times2}$ היא מטריצה כלשהיא לא סינגולרית.

המערכת החדשה תהיה :

$$x'(k+1) = T^{-1}ATx'(k) + T^{-1}Bu(k)$$

$$y(k) = CTx'(k)$$

כדוגמא נבחר $T=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. $T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ומשוואות המצב החדשות הן:

$$x'(k+1)=\begin{bmatrix}1 & -0.2\\ 0.5 & 0.3\end{bmatrix}x'(k)+\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=[\,1 \quad 0\,]\,x'(k)$$

6.5 התמרת פוריה - (Fourier Transform)

6.5.1 הגדרה: התמרת פוריה של הפונקציה $f(t)$ מוגדרת לפי:

$$F(f(t))=F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}f(t)\,dt \tag{6.54}$$

ובהתאמה, ההתמרה ההפוכה :

$$F^{-1}(F(j\omega))=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \tag{6.55}$$

6.5.2 הערות

א. התנאים לקיום התמרת פוריה בדומה להתמרת לפלס הם:

I. $f(t)$ רציפה למקוטעין.

II. $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty$

תנאי II הינו תנאי חמור ולכן להרבה פונקציות, שלהן התמרת לפלס, אין התמרת פוריה.

ב. לפונקציות שאינן פרידיות אותן התמרות פוריה ולפלס דו-צדדית באם תחום ההתכנסות של האתרונה כולל את $Re(s)=0$. במקרה זה, על מנת לקבל התמרת פוריה מציבים בהתמרת לפלס הדו-צדדית $s=j\omega$. (שים לב כי אם מציבים את השויון האחרון ב-(6.1) מקבלים את (6.54)).

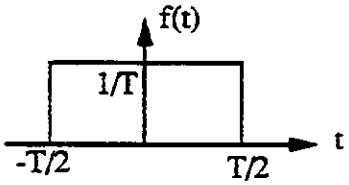
ג. בדומה להתמרות לפלס, התמרת פוריה היא חד ערכית. דהיינו, אין שתי פונקציות בזמן שלהן אותה התמרה.

דוגמא: מצא התמרת פוריה לשתי הפונקציות שבדוגמא ג' בסעיף 6.1.9 . פתרון : תחום ההתכנסות של התמרת לפלס הדו-צדדית של הפונקציה הראשונה אינו כולל את $Re(s)=0$ ולכן לפונקציה 1 אין התמרת פוריה. התנאי הנ"ל מתקיים עבור פונקציה 2. לכן:

ד. $|F(j\omega)|$ נקראת גם הספקטרום התדירותי של האות $f(t)$ ומתארת את ה"תוכן" התדירותי של האות כפונקציה של התדירות ω.

6.5.3 דוגמאות

א. התמרת פוריה של פולס מלבני (כמוראה בציור)

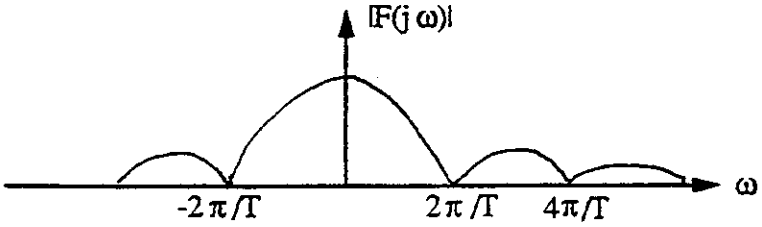


$$f(t) = \begin{cases} 1/T & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$

לפי ההגדרה ב-(6.54) נקבל:

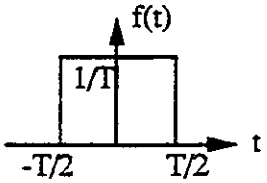
$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{T} e^{-j\omega t} dt = \frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2}$$

הספקטרום התדירותי של הפולס נתון בציור.



ב. התמרת פוריה של פונקצית הלם - $\delta(t)$.

ניתן לכתוב:

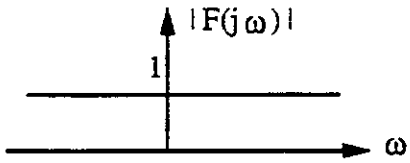


$$\delta(t) = \lim_{T \to 0} f(t)$$

לכן לפי דוגמא א' נקבל:

$$F(j\omega) = F(\delta(t)) = \lim_{T \to 0} \frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} = 1$$

הספקטרום התדירותי של פונקצית הלם נתון בציור ומשמעותו שלאות הלם אותה אמפליטודה בכל התדירויות.



ג. $F^{-1}[\delta(\omega-\omega_o)] = ?$; ω_o תדירות קבועה.

לפי (6.55) נקבל:

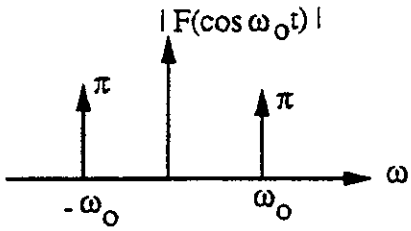
$$F^{-1}(\delta(\omega-\omega_o)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_o)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}e^{j\omega_o t}$$

ומכאן :

ד. התמרת פוריה של פונקציה מחזורית:

$$F(\cos\omega_o t) = F\{\frac{e^{j\omega_o t}+e^{-j\omega_o t}}{2}\} = \pi(\delta(\omega-\omega_o)+\delta(\omega+\omega_o))$$

וכצפוי הספקטרום התדירותי של פונקציה מחזורית ($\cos\omega_o t$ במקרה זה) כולל אמפליטודות בתדירות $\pm\omega_o$ בלבד (ראה ציור).



6.6 טבלת התמרות לפלס ו-Z (חד צדדיות).

f(t)	F(s)	f(kT)	F(z)
$\delta(t)$	1	$\delta(kT)\begin{cases}=1 & t=0\\=0 & t\neq 0\end{cases}$	1
$1(t)$ קפיצת מדרגה	$\frac{1}{s}$	$1(k)$	$\frac{z}{z-1}$
t	$1/s^2$	kT	$Tz/(z-1)^2$
$\frac{1}{2}t^2$	$1/s^3$	$\frac{1}{2}(kT)^2$	$\frac{T^2}{2}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	kTe^{-akT}	$\frac{Te^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}$
$\sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$\sin(k\beta T)$	$\frac{z\sin(\beta T)}{z^2-2z\cos(\beta T)+1}$
$\cos(\beta t)$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$\cos(k\beta T)$	$\frac{z^2-z\cos(\beta T)}{z^2-2z\cos(\beta T)+1}$
$e^{-at}\sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{-akT}\sin(k\beta T)$	$\frac{e^{-aT}z\sin(\beta T)}{z^2-2e^{-aT}z\cos(\beta T)+e^{-2aT}}$
a^t	$\frac{1}{s-\ln a}$	a^{kT}	$\frac{z}{z-a^T}$
$f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	$f(kT-nT)$ $f(kT+nT)$	$z^{-n}F(z)+\sum_{k=0}^{n-1}f(kT-nT)z^{-k}$ $z^n[F(z)-\sum_{k=0}^{n-1}f(kT)z^{-k}]$
$\lim_{t\to\infty}f(t)$	$\lim_{s\to 0}sF(s)$	$\lim_{k\to\infty}f(kT)$	$\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z)$
$\lim_{t\to 0}f(t)$	$\lim_{s\to\infty}sF(s)$	$\lim_{k\to 0}f(kT)$	$\lim_{z\to\infty}F(z)$

פרק 7 : אינטגרל (סכום) הקונבולציה

מטריצות תמסורת

7.1 מבוא

עד כה תארנו את הקשרים בין היציאות והכניסות של מערכת באמצעות משואות דיפרנציאליות (משואות הפרש), או אקוילנטית, באמצעות משואות מצב. ניתן לתאר את הקשרים בין היציאות והכניסות בצורות אחרות. בפרק זה נדון בקשרים (בין כניסות ליציאות) הבאים :

א. בציר הזמן - אינטגרל הקונבולציה (מערכות רציפות)

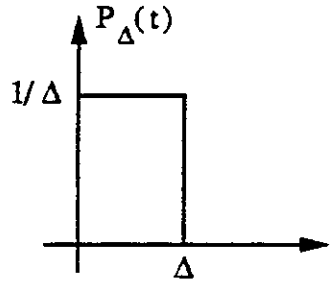
סכום הקונבולציה (מערכות בדידות).

ב. במשור הקומפלקסי - מטריצות תמסורת.

7.2 אינטגרל הקונבולציה (מערכות רציפות)

7.2.1 פונקצית הלם (אימפולס) - $\delta(t)$.

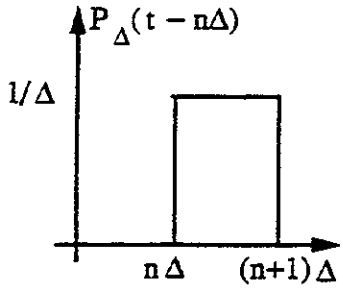
את פונקצית ההלם הגדרנו ב-5.4.1. ראינו גם כי ניתן לקבלה כגבול פונקצית הפולס הנתונה שוב בציור 7.1 כאשר $\Delta \to 0$:



ציור 7.1

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} P_\Delta(t) \qquad (7.1)$$

אם נזיז את פונקציית הפולס כך שתחל ב-$t = n\Delta$ נקבל את $P_\Delta(t-n\Delta)$ המוראית בציור 7.2 . אם $\Delta\to 0, n\to\infty$, ונגדיר $\tau = n\Delta$ נקבל :

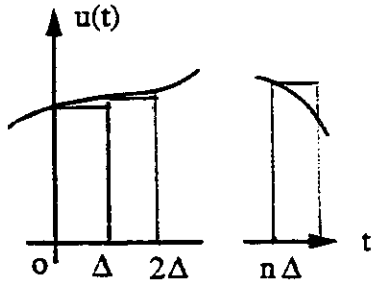


ציור 7.2

$$\lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ n \to \infty}} P_\Delta(t - n\Delta) = \delta(t - \tau) \qquad (7.2)$$

7.2.2 <u>הצגת אות (פונקציה) באמצעות הלמים</u>

את האות $u(t)$ ניתן לקרב, קרוב מדרגות, (ראה ציור 7.3), בדרך הבאה :



$$u(t) \cong \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta)\, p_{\Delta}(t-n\Delta)\,\Delta \qquad (7.3)$$

ציור 7.3

כאשר:

$$p_{\Delta}(t-n\Delta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta} & n\Delta \le t < (n+1)\Delta \\ 0 & \end{cases} \qquad (7.4)$$

אם נסמן $\tau = n\Delta$ ונקח $\Delta \to 0$ ו-$n \to \infty$, ונשתמש ב-(7.2) נקבל כי (7.3) תתן:

$$u(t) = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{-\infty}^{\infty} u(n\Delta)\, p_{\Delta}(t-n\Delta)\,\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau \qquad -\infty < t < \infty \qquad (7.5)$$

את (7.5) ניתן לפרש כפרוק הפונקציה $u(t)$ לרכיבים $u(\tau)\delta(t-\tau)$, דהיינו פרוק באמצעות הלמים בעצמות $u(\tau)$.

7.2.3 <u>אינטגרל הקונבולציה</u>

נסמן ב-$g(t,\tau)$ את תגובת המערכת הליניארית בזמן t לכניסת אימפולס יחידה בזמן τ, $\delta(t-\tau)$. מתכונת הליניאריות נקבל שתגובתה לכניסת אימפולס $\delta(t-n\Delta)$ בעצמת $u(n\Delta)\Delta$ תהיה:

$$g(t,n\Delta)u(n\Delta)\Delta$$

ולכן התגובה ל- $\sum_n u(n\Delta)\,\delta(t-n\Delta)\,\Delta$ תהיה : $\sum_n g(t,n\Delta)\,u(n\Delta)\,\Delta$

וכאשר $n\Delta = \tau$, $n \to \infty$, $\Delta \to 0$ נקבל שהתגובה $y(t)$ בזמן t נתונה על ידי :

$$y(t) = \sum_{\substack{n \\ n \to \infty \\ \Delta \to 0}} g(t,n\Delta)\,u(n\Delta)\,\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} g(t,\tau)\,u(\tau)\,d\tau \qquad (7.6)$$

משוואה (7.6) מציגה קשר בין יציאת המערכת בזמן t , $y(t)$, לכניסה $u(\cdot)$. קשר זה נקרא **אינטגרל הקונבולציה**. הקשר הנ"ל דן אך ורק בהשפעת הכניסה על היציאה ואינו לוקח בחשבון תנאי התחלה.

<u>הערה</u>: הקשר ב-(7.6) פותח למקרה הסקלרי (SISO) אך תופס גם במקרה הוקטורי. אם $y \in R^r, u \in R^m$ תהיה $g(t,\tau)$ מטריצה $g(t,\tau) \in R^{r \times m}$.

7.2.4 <u>מקרים פרטיים של (7.6)</u>

א. <u>במערכת סטציונרית</u> מתקיים לכל α :

$$g(t,\tau) = g(t+\alpha\ ,\ \tau+\alpha) \tag{7.7}$$

ולכן :

$$g(t,\tau) = g(t-\tau,0) = g(t-\tau) \tag{7.8}$$

עם (7.8) תתקבל (7.6) כ-

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad , \quad -\infty < t < \infty \tag{7.9}$$

ב. <u>במערכת סיבתית (קוזאלית)</u> אין התגובה לכניסה מקדימה את הכניסה. במקרה זה תתקבל (7.9) כ:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{7.10}$$

אם בנוסף לסטציונריות ולסיבתיות, הכניסה $u(t) = 0$ עבור $t < 0$ נקבל:

$$y(t) = \int_{0}^{t} g(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{7.11}$$

7.3 <u>סכום הקונבולציה (מערכות בדידות)</u>

בפרק הקודם הוראה שניתן לתאר פונקציה בדידה $u(n)$ על ידי טור הלמים משוקלל, דהיינו :

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)\delta(n-k) \tag{7.12}$$

בדומה למערכות רציפות נסמן את תגובת המערכת הליניארית הבדידה ברגע n לכניסת הלם יחידתית ברגע k על ידי $g(n,k)$.

בהנחת הליניאריות, תהיה תגובת המערכת להלם בעצמת $u(k)$: $g(n,k)u(k)$ ותגובתה לטור הלמים משוקלל הנתון על ידי (7.12) תהיה לכן :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n,k)u(k) \tag{7.13}$$

הקשר כניסה-יציאה ב-(7.13) נקרא בשם **סכום הקונבולציה** . קשר זה עוסק אך ורק בתגובה המאולצת (ללא תנאי התחלה).

עבור מערכת סטציונרית נקבל :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n-k)u(k) \tag{7.14}$$

עבור מערכת סטציונרית וסיבתית נקבל :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} g(n-k)u(k) \tag{7.15}$$

ואם גם $u(k) = 0$ עבור $k < 0$ יתקבל :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} g(n-k)u(k) \tag{7.16}$$

7.4 מטריצות תמסורת (מערכות סטציונריות)

7.4.1 מערכות רציפות

את אינטגרל הקונבולוציה (7.11) נתמיר בהתמרת לפלס :

$$Y(s) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(t-\tau)u(\tau)d\tau e^{-st}dt =$$

$$= \int_0^{\infty} [\int_0^{\infty} g(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dt]\, u(\tau)e^{-s\tau}d\tau \tag{7.17}$$

נגדיר $v = t-\tau$ ונפריד האינטגרלים שב-(7.17)

$$Y(s) = \int_{-\tau}^{\infty} g(v)e^{-sv}dv \int_0^{\infty} u(\tau)e^{-s\tau}d\tau =$$

$$= \int_0^{\infty} g(v)e^{-sv}dv \int_0^{\infty} u(\tau)e^{-s\tau}d\tau \tag{7.18}$$

האינטגרל השני ב-(7.18) אינו אלא $U(s) = L[u(t)]$. את האינטגרל הראשון נסמן כ- $G(s)$. $G(s)$ נתון על ידי :

$$G(s) \stackrel{\Delta}{=} \int_0^{\infty} g(\tau)e^{-s\tau}d\tau \tag{7.19}$$

ואינו אלא התמרת לפלס של תגובת ההלם של המערכת. $G(s)$ נקראת בשם **מטריצת התמסורת** של המערכת והיא הקושרת בין וקטורי הכניסה והיציאה המותמרים לפי :

$$Y(s) = G(s)\,U(s) \tag{7.20}$$

ממדי מטריצת התמסורת הם $(r \times m)$, כאשר r - מסי היציאות, ו- m - מסי הכניסות.

<u>הערה</u> : במערכת SISO - $G(s)$ היתה **פונקצית תמסורת** ואת משואה (7.20) ניתן לכתוב במקרה זה בדרך הבאה :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{7.21}$$

דהיינו : פונקצית התמסורת היא היחס בין היציאה המותמרת לבין הכניסה המותמרת עבור **תנאי התחלה אפס**.

7.4.2 <u>מערכות בדידות</u>

את סכום הקונבולציה שב-(7.16) נתמיר התמרת z לפי הגדרה :

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=o}^{\infty} g(n-k)u(k)z^{-n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} g(n-k)z^{-(n-k)}u(k)z^{-k} \tag{7.22}$$

נסמן : $n\text{-}k = p$, ונקבל :

$$Y(z) = \sum_{p=-k}^{\infty} g(p)z^{-p}\sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k} \tag{7.23}$$

היות ועבור מערכת סיבתית תהיה תגובת ההלם : $g(p) = 0\,,\ p < 0$, תהיה (7.23) נתונה על ידי :

$$Y(z) = \sum_{p=0}^{\infty} g(p)z^{-p}\sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k} \tag{7.24}$$

אם נגדיר :

$$G(z) = \sum_{p=0}^{\infty} g(p)z^{-p} \tag{7.25}$$

ונזכר כי :

$$U(z) = Z[u(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k}$$

נקבל מ-(7.24)

$$Y(z) = G(z)U(z) \tag{7.26}$$

$G(z)$ נקראת בשם **מטריצת התמסורת הבדידה** (או הפולסית) של המערכת. ממדיה הם $r \times m$, והיא אינה אלא התמרת Z של תגובת ההלם של המערכת הבדידה.

7.5 קבלת מטריצת תמסורת ממימוש נתון

7.5.1 מערכות רציפות

אם משווים את הפתרון המותמר של משואות המצב, (6.20), עם (7.20), (וזוכרים כי מטריצת תמסורת מוגדרת עבור $x(o) = 0$) מקבלים :

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D \tag{7.27}$$

היות ו-$G(s) = L[g(t)]$, כאשר $g(t)$ הינה תגובת ההלם של המערכת, תתן התמרת לפלס ההפוכה של (7.27) :

$$g(t) = L^{-1}[G(s)] = Ce^{At}B + D\delta(t) \tag{7.28}$$

דוגמא 1 : נתונה מערכת באמצעות הממוש :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

מצא את מטריצת התמסורת של המערכת.

פתרון : לפי (7.27) נקבל :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}$$

דוגמא 2 : מצא את תגובת ההלם של המערכת שבדוגמא 1 .

פתרון : דרך א.

$$g(t) = L^{-1}[G(s)] = L^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{-t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$g(t) = L^{-1}[G(s)] = L^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{-t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

דרך ב':

$$g(t) = Ce^{At}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

<u>הערה</u> : אם מערכת SISO נתונה על ידי משואה דיפרנציאלית הקושרת בין הכניסה u לבין היציאה y:

$$\sum_{i=o}^{n} a_i y^{(i)} = \sum_{i=o}^{m} b_i u^{(i)}$$

ניתן לכתוב ישירות ממשואה זו את פונקצית התמסורת של המערכת. אם נתמיר המשואה באמצעות התמרת לפלס (עם תנאי התחלה 0) נקבל :

$$\left(\sum_{i=o}^{n} a_i s^i\right) Y(s) = \left(\sum_{i=o}^{m} b_i s^i\right) U(s)$$

ולכן

$$G(s) = Y(s) / U(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=o}^{n} a_i s^i}$$

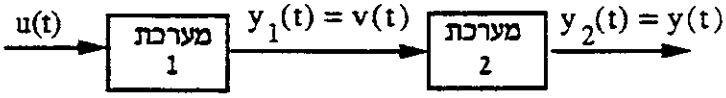
7.5.2 <u>מערכות בדידות</u>

מהשואת משואות (7.26) ו-(6.48) מקבלים, בדומה לסעיף הקודם,

$$G(z) = C(zI-A)^{-1}B + D \qquad (7.29)$$

7.6 <u>חבור טורי של שתי מערכות (ללא השפעה הדדית)</u>

נתונות שתי מערכות (1 ו-2) המחוברות בטור כך שיציאת מערכת 1 משמשת ككניסה למערכת 2 (ראה ציור 7.4). המערכות נתונות באמצעות ממושיהן או באמצעות מטריצות התמסורת שלהן. המטרה היא להחליף את התבור הטורי במערכת אחת, אקוילנטית, שכניסתה היא u(t) ויציאתה y(t) (ציור 7.5). בסעיף 7.6.1 נדון בממוש המערכת השקולה, ובסעיף 7.6.2 נדון במטריצת התמסורת שלה. בסעיף 7.6.3 נוכיח את הזהות בין שתי התוצאות.



ציור 7.4

ציור 7.5

7.6.1 ממוש אקוויולנטי

נתונות שתי המערכות באמצעות ממושיהן :

$$\begin{aligned} &a) \quad \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ &b) \quad y_1 = C_1 x_1 + D_1 u \end{aligned} \tag{7.30}$$

$$\begin{aligned} &a) \quad \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 v \\ &b) \quad y_2 = C_2 x_2 + D_2 v \end{aligned} \tag{7.31}$$

כאשר:

$$x_i \in R^{n_i}; \quad A_i \in R^{n_i \times n_i}; \quad B_i \in R^{n_i \times m_i}; \quad C_i \in R^{r_i \times n_i}; \quad D_i \in R^{r_i \times m_i};$$

$$i = 1, 2$$

$$u \in R^{m_1}; \quad v \in R^{r_1 = m_2}; \quad y = y_2 \in R^{r_2}; \quad y_1 \in R^{r_1}$$

ו-$v \equiv y_1$ (ולכן $r_1 = m_2$).

נציב v $(v=y_1)$ מ-(7.30) ב-(7.31) ונקבל :

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \tag{7.30a}$$

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2(C_1 x_1 + D_1 u) = B_2 C_1 x_1 + A_2 x_2 + B_2 D_1 u \tag{7.31a}$$

$$y = y_2 = C_2 x_2 + D_2(C_1 x_1 + D_1 u) = D_2 C_1 x_1 + C_2 x_2 + D_2 D_1 u \tag{7.31b}$$

נגדיר וקטור מצב מורחב $x \in R^{(n_1 + n_2)}$ על ידי :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ --- \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{7.32}$$

ובאמצעותו נכתוב את (7.30a), (7.31a) ו-(7.31b):

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \hline \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline B_2C_1 & A_2 \end{array}\right) \end{array} X + \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \end{array} \begin{array}{c} m_1 \\ \left(\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2D_1 \end{array}\right) \end{array} u \tag{7.33}$$

$$y = r_2 \left(\begin{array}{cc} n_1 & n_2 \\ D_2C_1 & C_2 \end{array} \right) x + \begin{array}{c} m_1 \\ (D_2D_1) \end{array} u$$

אם המערכת השקולה שבציור 7.5 תתואר על ידי הממוש :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

(7.34)

$$y = Cx + Du$$

הרי מהשוואת (7.34) עם (7.33) נקבל :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline B_2C_1 & A_2 \end{array}\right) \; ; \; B = \left(\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2D_1 \end{array}\right) \; ; \; C = (D_2C_1 \mid C_2) \; ; \; D = D_2D_1 \tag{7.35}$$

הקשרים הנ"ל מאפשרים לכתוב את ממוש המערכת השקולה (7.34) , ישירות מתוך ממושי שתי המערכות.

הערה: החיבור הטורי המיוצג בציור 7.4 נקרא לעיתים תבור טורי **ללא השפעה הדדית** (ללא אינטראקציה), דהיינו : אין דינמיקת מערכת 2 משפיעה על דינמיקת מערכת 1. דבר זה בא לידי בטוי בכך שאין וקטור המצב x_2 (כולו או חלקו) מופיע במשואות המצב של מערכת 1 (ראה גם סעיפים 7.8 ו-7.9).

7.6.2 מטריצת תמסורת שקולה

אם מטריצות התמסורת של מערכות 1 ו-2 נתונות על ידי $G_1(s)$ ו-$G_2(s)$ בהתאמה ו-

$$V(s) = G_1(s)\, U(s) \tag{7.36}$$

$$Y(s) = G_2(s)\, V(s) \tag{7.37}$$

הרי על ידי הצבת (7.36) ב-(7.37) נקבל :

$$Y(s) = G_2(s)\, G_1(s)\, U(s) \tag{7.38}$$

ומכאן ש-$G(s)$, מטריצת התמסורת של המערכת השקולה נתונה על ידי :

$$G(s) = G_2(s)\, G_1(s) \tag{7.39}$$

מסקנה - מטריצת התמסורת של שתי מערכות המחוברות בטור שווה למכפלת מטריצות התמסורת שלהן (בסדר הכתוב).

7.6.3 הזהות בין שני התיאורים

הקשרים בין ממושי המערכות 1 ו-2 לבין מטריצות התמסורת המתאימות נתנים על ידי :

$$G_i(s) = C_i(sI-A_i)^{-1}B_i + D_i \qquad i = 1,2 \tag{7.40}$$

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D \tag{7.41}$$

נראה כי תוצאות החבור באמצעות הממושים, (7.34-5) , זהה לתוצאת החבור באמצעות מטריצות התמסורת, (7.39) .

נציב את (7.35) ל-(7.41) ונקבל :

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D =$$

$$= (D_2C_1 \mid C_2)\left(\begin{array}{c|c} sI_{n_1} - A_1 & 0 \\ \hline -B_2C_1 & sI_{n_2} - A_2 \end{array}\right)^{-1} \cdot \left(\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2D_1 \end{array}\right) + D_2D_1 =$$

$$= (D_2C_1 \mid C_2)\left(\begin{array}{c|c} (sI_{n_1} - A_1)^{-1} & 0 \\ \hline (sI_{n_2} - A_2)^{-1}B_2C_1(sI_{n_1} - A_1)^{-1} & (sI_{n_2} - A_2)^{-1} \end{array}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2D_1 \end{array}\right) + D_2D_1 = [C_2(sI_{n_2} - A_2)^{-1}B_2 + D_2][C_1(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 + D_1] =$$

$$= G_2(s)G_1(s) \tag{7.42}$$

<u>הערה</u>: למציאת $(sI-A)^{-1}$ השתמשנו בקשר ידוע באלגברה ליניארית עבור מטריצות מחולקות: אם A^{-1} ו-B^{-1} קימים אזי :

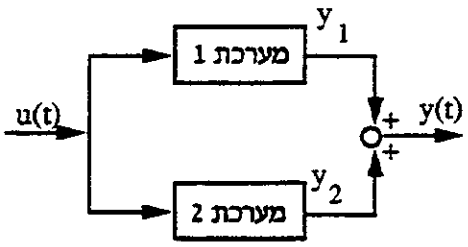
$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & B \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{array}\right) \tag{7.44}$$

7.7 חבור מערכות במקביל

נתונות שתי מערכות המחוברות כבציור 7.6. לשתי המערכות אותה כניסה u ויציאותיהן מסתכמות ונותנות את היציאה y. על מנת שהחיבור כמתואר בציור יהיה אפשרי על $m_1 = m_2$ ו-$r_1 = r_2$.

המערכות נתונות באמצעות המימושים (7.30) ו-(7.31) ובאמצעות מטריצות התמסורת $G_1(s)$ ו-$G_2(s)$.

המטרה היא למצוא ממוש ומטריצת תמסורת של המערכת השקולה (ציור 7.7).



ציור 7.6

ציור 7.7

7.7.1 ממוש שקול

מערכת 1 ומערכת 2 מיוצגות על ידי ממושיהן (7.30) ו-(7.31) בהתאמה, כאשר $v \overset{\Delta}{=} u$, נגדיר וקטור מצב מורחב כב-(7.32). צרוף (7.30a) עם (7.31a) יתן לכן :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \hline \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right) \end{array} x + \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \end{array} \begin{array}{c} m \\ \left(\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right) \end{array} u \tag{7.44}$$

כאשר סימנו $m = m_1 = m_2$.

נציב עתה את (7.30b) ואת (7.31b) ב-$y = y_1 + y_2$:

$$y = y_1 + y_2 = C_1x_1 + C_2x_2 + D_1u + D_2u = (C_1 \quad C_2)x + (D_1+D_2)u \tag{7.45}$$

מ-(7.44) ו-(7.45) נקבל כי מטריצות הממוש של המערכת השקולה נתונות על ידי :

$$A = \left(\begin{array}{cc} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right); \quad B = \left(\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right); \quad C = (C_1 \quad C_2); \quad D = D_1 + D_2 \tag{7.46}$$

7.7.2 <u>מטריצת תמסורת שקולה</u>

היציאות המותמרות בשתי המערכות הן :

$$Y_1(s) = G_1(s) \cdot U(s)$$

$$Y_2(s) = G_2(s) \cdot U(s)$$

נציב הנ"ל ל-

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = (G_1(s)+G_2(s))U(s) = G(s) \cdot U(s) \tag{7.47}$$

ומכאן :

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) \tag{7.48}$$

7.7.3 אם מציבים את (7.46) ב-(7.41) מקבלים :

$$G(s) = (C_1 \quad C_2)\left(\begin{array}{c|c} (sI_{n_1} - A_1)^{-1} & 0 \\ \hline 0 & (sI_{n_2} - A_2)^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right) + D_1 + D_2$$

או

$$G(s) = (C_1(sI-A_1)^{-1}B_1+D_1)+(C_2(sI-A_2)^{-1}B_2+D_2) = G_1(s) + G_2(s)$$

השויון האחרון מוכיח כי התוצאות בסעיפים 7.7.1 ו-7.7.2 אקוויולנטיות.

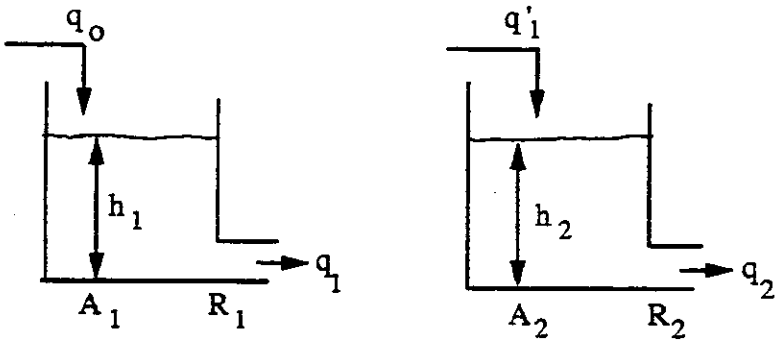
7.8 <u>דוגמאות לחבור טורי עם ובלי השפעה הדדית</u>

7.8.1 <u>דוגמה 1</u>

נתונים שני מיכלים כמתואר בציור 7.8.

שטחי החתך, A_1 , A_2 קבועים וכן ההתנגדויות R_1 ו-R_2 קבועות.

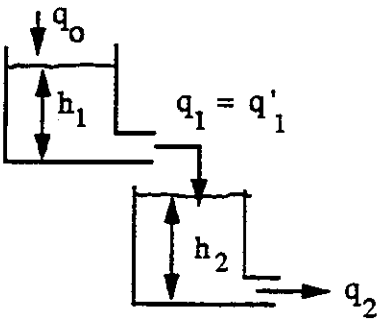
א. מצא את $G_1(s) = \dfrac{q_1(s)}{q_o(s)}$ ואת $G_2(s) = \dfrac{q_2(s)}{q'_1(s)}$.



ציור 7.8

ב. המיכלים מחוברים (ללא אינטראקציה) כמתואר בציור 7.9.

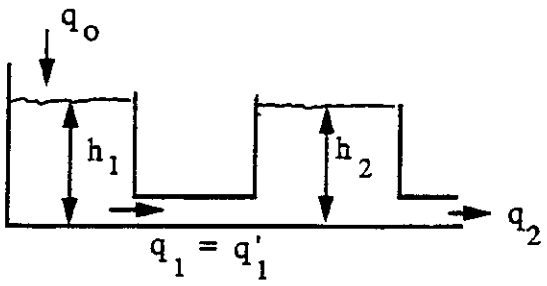
מצא $G(s) = \frac{q_2(s)}{q_o(s)}$ והראה כי במקרה זה $G(s) = G_1(s)\, G_2(s)$.



ציור 7.9

ג. המיכלים מחוברים עם אינטראקציה כמתואר בציור 7.10 .

מצא את $G(s) = \frac{q_2(s)}{q_o(s)}$ והראה כי במקרה זה $G(s) \neq G_1(s)\, G_2(s)$.



ציור 7.10

פתרון:

א. משואות המצב עבור המיכל הראשון הן :

$$\dot{h}_1 = -\frac{1}{A_1R_1}\cdot h_1 + \frac{1}{A_1}q_o$$

$$q_1 = \frac{1}{R_1}\cdot h_1$$

מתוך כך פונקציית התמסורת היא :

$$G_1(s) = \frac{q_1(s)}{q_o(s)} = \frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{A_1R_1}}\cdot\frac{1}{A_1} = \frac{1}{A_1R_1s+1} = \frac{1}{\tau_1 s+1} \qquad (\tau_1 \stackrel{\Delta}{=} A_1R_1)$$

בצורה דומה :

$$G_2(s) = \frac{q_2(s)}{q_1'(s)} = \frac{1}{A_2R_2s+1} = \frac{1}{\tau_2 s+1} \qquad (\tau_2 \stackrel{\Delta}{=} A_2R_2)$$

ב. עבור המערכת שבציור 7.9 נגדיר :

$$y \stackrel{\Delta}{=} q_2, \quad u \stackrel{\Delta}{=} q_o, \quad x \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

ואז משואות המצב הן :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau_1} & 0 \\ \frac{1}{A_2R_1} & -\frac{1}{\tau_2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} x$$

ופונקציית התמסורת היא :

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B = [0 \quad \frac{1}{R_2}] \frac{\begin{pmatrix} s+\frac{1}{\tau_2} & 0 \\ \frac{1}{A_2R_1} & s+\frac{1}{\tau_1} \end{pmatrix}}{(s+\frac{1}{\tau_1})(s+\frac{1}{\tau_2})} \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$$

ורואים כי במקרה זה :

$$G(s) = G_2(s)\, G_1(s)$$

וניתן להשתמש בתוצאות סעיף 7.6.

ג. x , u ו-y הינם כפי שהוגדרו בסעיף ב'. משוואות המצב עבור המערכת שבסעיף ג' הן :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{A_1R_1} & \frac{1}{A_1R_1} \\ \frac{1}{A_2R_1} & -(\frac{1}{A_2R_1} + \frac{1}{A_2R_2}) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = [\,0 \quad \frac{1}{R_2}\,]\, x$$

מכאן ,

$$G(s) = [0 \quad \frac{1}{R_2}] \frac{\begin{pmatrix} s + \frac{1}{A_2R_2} + \frac{1}{\tau_2} & \frac{1}{\tau_1} \\ \frac{1}{A_2R_1} & s + \frac{1}{\tau_1} \end{pmatrix}}{\tau_1\tau_2 s^2 + (\tau_2 + A_1R_2 + \tau_1)s + 1} \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

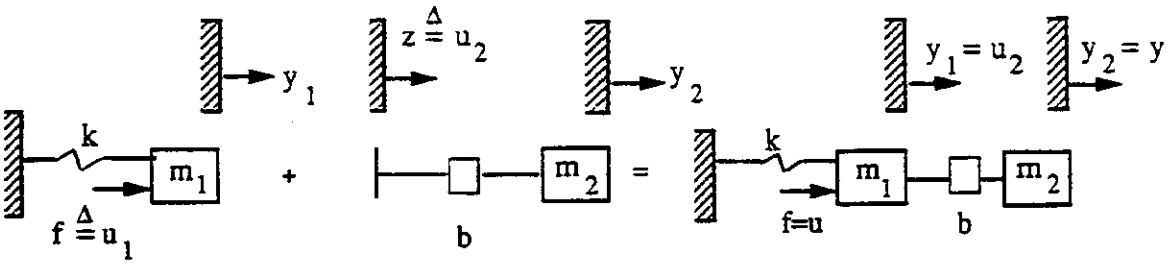
$$= \frac{1}{\tau_1\tau_2 s^2 + (\tau_2 + A_1R_2 + \tau_1)s + 1}$$

כדי להראות שביטוי זה שונה מהמכפלה $G_2(s)\, G_1(s)$ ניתן לרשום את $G(s)$ כך :

$$G(s) = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) + A_1R_2 s} \neq G_2(s) G_1(s)$$

במקרה זה המיכלים מחוברים טורית אך עם השפעה הדדית ולא ניתן לקבל את המערכת השקולה של חבור שתי המערכות באמצעות הפתוח בסעיף 7.6, ודיאגרמת הבלוקים שבציור 7.4 אינה מיצגת את חבורם של שני המיכלים.

7.8.2 <u>דוגמא 2</u>



מערכת א' + מערכת ב' מערכת ב' מערכת א'

ציור 7.11

נתונות שתי המערכות המכניות א' ו-ב' (ראה ציור 7.11). במערכת א' הכניסה היא הכח f (u_1) והיציאה היא y_1 - המיקום הרגעי של המסה m_1. במערכת ב' הכניסה היא z (u_2), המיקום הרגעי של המרסן, ויציאתה היא y_2 - המקום הרגעי של m_2.

א. מצא את $G_1(s) = \frac{y_1(s)}{f(s)}$ ו- $G_2(s) = \frac{y_2(s)}{z(s)}$.

ב. (ראה ציור 7.11) מחברים את שתי המערכות כך שיציאת מערכת א' (y_1) היא הכניסה למערכת ב' $(z=y_1)$. מצא את $G(s) = \frac{y_2(s)}{f(s)}$. האם $G(s) = G_2(s) \cdot G_1(s)$?

פתרון :

א. מציאת G_1 :

$$m_1\ddot{y}_1 + ky_1 = f$$

מכאן

$$G_1(s) = \frac{y_1(s)}{f(s)} = \frac{1}{m_1s^2 + k}$$

מציאת G_2 :

$$m_2\ddot{y}_2 + b(\dot{y}_2 - \dot{z}) = 0$$

מכאן

$$G_2(s) = \frac{y_2(s)}{z(s)} = \frac{bs}{m_2s^2 + bs} = \frac{b}{m_2s + b}$$

ב. דינמיקת המערכת המשולבת נתונה על ידי :

$$m_1\ddot{y}_1 + ky_1 + b(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = f \qquad (7.50)$$

$$m_2\ddot{y}_2 + b(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = 0 \qquad (7.51)$$

היות ובדינמיקת מערכת א' (7.50) מופיע y_2 (ו/או נגזרותיו) פרוש הדבר שהתבור הוא <u>עם</u> השפעה הדדית ולכן $G \neq G_2 \cdot G_1$. נראה זאת. התמרת לפלס של (7.50) ו-(7.51) :

$$(m_1s^2 + bs + k)\, Y_1(s) - bs\, Y_2(s) = f(s)$$

$$(m_2s^2 + bs)\, Y_2(s) = bs\, Y_1(s)$$

נחלץ $Y_1(s)$ מהמשואה השניה ונציב במשואה הראשונה ונקבל :

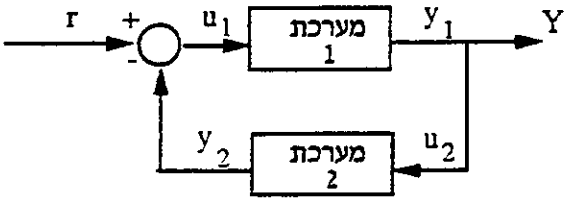
$$G(s) = \frac{Y_2(s)}{f(s)} = \frac{b}{(m_1s^2 + k)(m_2s + b) + bm_2s^2} \neq G_2(s)\, G_1(s) =$$

$$= \frac{b}{(m_1s^2 + k)(m_2s + b)}$$

7.9 <u>חבור משובי</u>

נתונות שתי מערכות 1 ו-2 המחוברות כך שיציאת המערכת 1, y_1 , מהווה כניסה למערכת 2 (דהיינו $u_2 = y_1$) ויציאת מערכת 2 y_2 יחד עם הכניסה החיצונית r יוצרים הכניסה u_1 למערכת 1 לפי (ראה ציור 7.12) :

$$u_1 = r - y_2$$



ציור 7.12

שתי המערכות 1 ו-2 נתונות באמצעות מטריצות התמסורת $G_1(s)$ ו-$G_2(s)$ בהתאמה. על מנת שניתן יהיה לחבר את שתי המערכות כמתואר בציור 7.12 ברור כי אם ממדי G_1 הם $p \times m$ הרי ממדי G_2 הם $m \times p$. כלומר $r, u_1, y_2 \in R^m$ ו-$y_1, u_2 \in R^p$.

נסתפק כאן במציאת מטריצת התמסורת השקולה בין r ל-y .

מהציור ברור כי

$$y = y_1 = G_1 u_1 = G_1(r - y_2) \tag{7.52}$$

ו-

$$y_2 = G_2 u_2 = G_2 y \tag{7.53}$$

ולכן אם נציב y_2 ב-(7.52) נקבל :

$$y = \underbrace{(I_p + G_1G_2)^{-1}G_1}_{\text{שקול } G} r = G r \tag{7.54}$$

הערות :

1. ניתן להראות כי :

$$G = (I_p + G_1G_2)^{-1} G_1 = G_1(I_m+G_2G_1)^{-1} \tag{7.55}$$

2. במערכות SISO (בהן $m = p = 1$) ניתן כמובן לכתוב את G שקול בצורה :

$$G = \frac{G_1}{1 + G_1G_2} \tag{7.56}$$

7.10 פונקציות תמסורת ותגובות של מערכות SISO מסדר ראשון ושני

בפרק 1 הצגנו מודלים מתמטיים של מערכות פיזיקליות פשוטות. ראינו כי מספר נכבד של מערכות פיזיקליות פשוטות הינן מערכות מסדר ראשון ושני (ראה סעיף 1.4.2.4). נקבל כאן את פונקציות התמסורת שלהן ואת תגובותיהן האפיניות.

7.10.1 מערכות מסדר ראשון

אם $y(t)$ ו-$u(t)$ הן היציאה והכניסה בהתאמה של המערכת הרי המשואה הדפרנציאלית של מערכת טיפוסית מסדר I (הנקראת גם פיגור מסדר I) נתונה על ידי (1.43).

$$\frac{a_1}{a_o}\dot{y}(t) + y(t) = \frac{b_o}{a_o}u(t) \tag{1.43}$$

מכאן שפונקצית התמסורת של מערכת כזו נתונה על ידי

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_o/a_o}{\frac{a_1}{a_o}s + 1} \tag{7.57}$$

אם נסמן $\tau \triangleq \frac{a_1}{a_o}$, $k \triangleq \frac{b_o}{a_o}$, תכתב (7.57) בצורה :

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \tag{7.58}$$

משואה (7.58) היא פונקצית התמסורת של חמש המערכות הפיזיקליות מסדר I שהצגנו בפרק 1.4.2.1. τ נקרא בשם **קבוע הזמן** של המערכת ו-k נקרא בשם **ההגבר הסטטי** של המערכת. בכל המערכות הפיזיקליות שתארנו בפרק 1 $\tau > 0$. קימות מערכות בהן $\tau < 0$ (מערכות לא יציבות - ראה פרק 8). בהן לא נטפל כאן.

אם הכניסה למערכת היא שינוי מדרגה בגודל a $(u(t) = a \cdot 1(t))$ נקבל שתגובתה לכניסה זו נתונה על ידי :

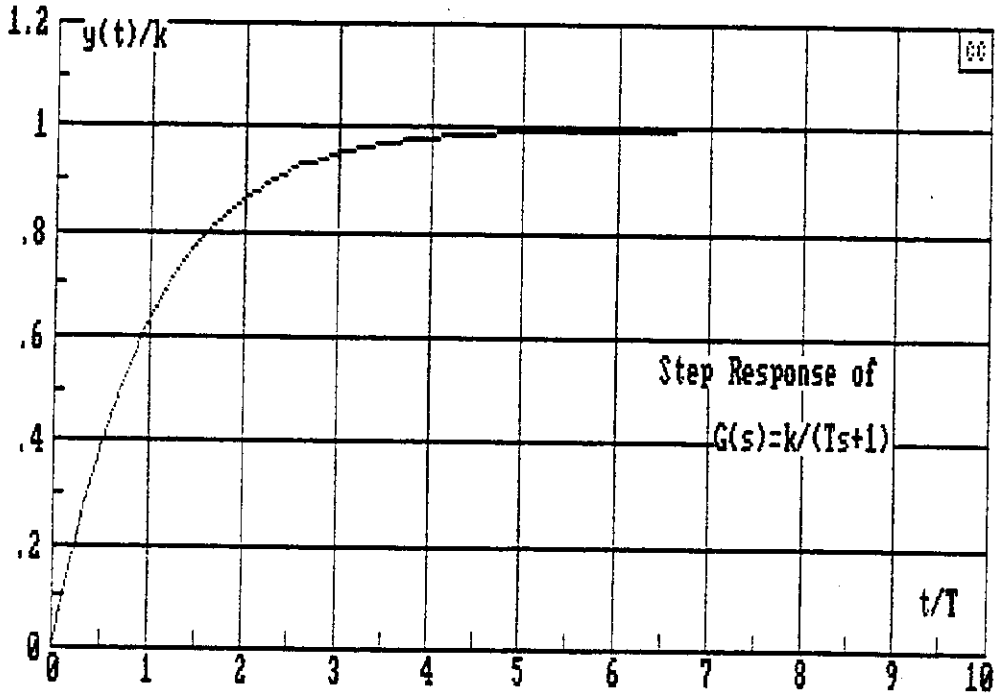
$$y(s) = \frac{a}{s} \cdot \frac{k}{\tau s + 1}$$

ולכן

$$y(t) = ak(1 - e^{-t/\tau}) \qquad (7.59)$$

מ-(7.59) ניתן להסיק המסקנות הבאות : א. $y(t)$, תגובת המערכת לשנוי מדרגה הינה מונוטונית עולה. כלומר $y(t+\alpha) > y(t)$ עבור $\alpha > 0$. ב. $y(o) = 0$ ו-$y(\infty) = ak$ ג. ככל ש-τ (קבוע הזמן) גדול יותר כן התגובה $y(t)$ איטית יותר. ד. ככל ש-k גדול יותר, $y(\infty)$ גדול יותר עבור אותו a . ההגבר הסטטי k מוגדר כיחס $y(\infty) / a$.

התגובה למדרגה, $y(t)$, שב-(7.59) של מערכת מסדר I נתונה בציור 7.13 .



ציור 7.13 .

ד. מחזור תנודות מרוסנות - T_m

$$T_m = 2\pi / (\omega_n \sqrt{1-\xi^2}) \tag{7.67}$$

ולכן תדירות התנודות המרוסנות ω_m נתונה על ידי :

$$\omega_m = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \tag{7.68}$$

כאשר $\xi = 0$ נקבל $\omega_m = \omega_n$ כלומר מערכת ללא רסון תתנדנד בתדירותה הטבעית.

פרק 8 : יציבות מערכות

בפרק זה נעסוק באחד ממושגי המפתח במערכות דינמיות - מושג היציבות. נטפל במערכות סטציונריות בלבד.

8.1 מערכות רציפות

8.1.1 קוטב, אפס ומשוואה אופינית - מערכת SISO

יהיה הקשר כניסה - יציאה במערכת SISO נתון באמצעות פונקצית תמסורת רציונלית $G(s)$, שהיא מנה של שני פולינומים :

$$G(s) = \frac{\sum_{i=o}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=o}^{n} a_i s^i} \qquad (8.1)$$

מבלי לאבד מהכלליות נניח $a_n = 1$ ונכתוב את (8.1) בצורה מפורקת :

$$G(s) = \frac{b_m \prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s - p_i)} \qquad (8.2)$$

<u>הגדרות</u> : פולינום המכנה של פונקצית התמסורת נקרא בשם **הפולינום האופיני** של המערכת (אשר מתוארת על ידי $G(s)$) ויסומן על ידי $\Delta(s)$:

$$\Delta(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i = \prod_{i=1}^{n} (s - p_i) \qquad (8.3)$$

המשוואה : $\Delta(s) = 0$ נקראת בשם - **המשוואה האופינית** של המערכת (8.1) .

אפסים (zeroes) - שרשי פולינום המונה שבפונקצית התמסורת, $s = +z_i$, נקראים האפסים של המערכת.

קטבים (poles) - שרשי המשוואה האופינית, $s = +p_i$, נקראים הקטבים של המערכת.

<u>**דוגמא 1**</u> : נתונה פונקצית התמסורת הבאה :

$$G(s) = \frac{2s^2 - 2s - 4}{s^3 + 5s^2 + 8s + 6} = \frac{2(s+1)(s-2)}{(s+3)(s+1+j)(s+1-j)}$$

קטבי המערכת הם :

$$p_1 = -3 \; ; \; p_2 = -1-j \; ; \; p_3 = -1+j$$

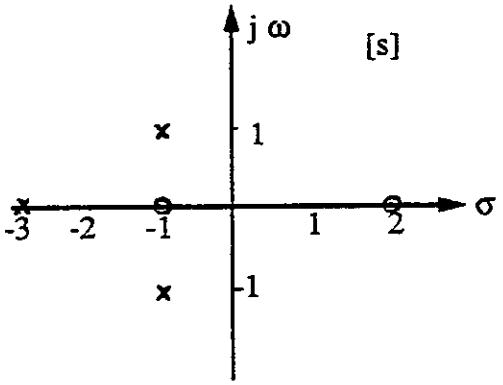
אפסי המערכת הם :

$$z_1 = -1 \; ; \quad z_2 = 2$$

8.1.2 <u>המשור הקומפלקסי</u> [S]

s , משתנה לפלס, הינו משתנה קומפלקסי .

נסמן :



$$Re(s) = \sigma \qquad (8.4) \qquad Im(s) = \omega$$

ציור 8.1

נגדיר (ראה ציור 8.1) :

RHP (right half plane) - המחצית הימנית של המשור הקומפלקסי [s],

LHP (left half plane) - המחצית השמאלית של המשור הקומפלקסי [s].

RHP - ORHP הפתוח (שאינו כולל את הציר jω) : $Re(s) > 0$

RHP - CRHP הסגור (כולל את הציר jω) : $Re(s) \geq 0$

ובהתאמה :

LHP - OLHP הפתוח : $Re(s) < 0$.

LHP - CLHP הסגור : $Re(s) \leq 0$.

את הקטבים והאפסים של מערכת ניתן למקם סכמטית במשור [s] . נסמן קטבים על ידי x ואפסים על ידי 0.

הקטבים והאפסים, למשל, של G(s) שבדוגמא 1 מסומנים בציור 8.1 .

<u>הערה</u> : כאשר מערכת SISO נתונה באמצעות ממוש במרחב המצב :

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = cx + du \qquad (8.5)$$

תהיה פונקצית התמסורת המתאימה :

$$G(s) = c(sI - A)^{-1}b + d = \frac{cAdj\,(sI - A)b}{det\,(sI - A)} + d = \frac{\psi(s)}{\Delta(s)} \qquad (8.6)$$

לכן המשואה האופינית תהיה :

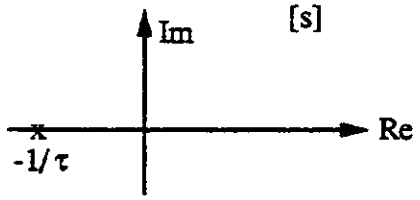
$$\Delta(s) = det(sI-A) = 0 \qquad (8.7)$$

קטבי המערכת יהיו לכן העייע של המטריצה A

ואפסי המערכת יהיו השרשים של $\psi(s) = 0$.

<u>הערה</u> : בסעיף 7.10 הצגנו תגובת אפיניות של מערכות מסדר ראשון ושני.

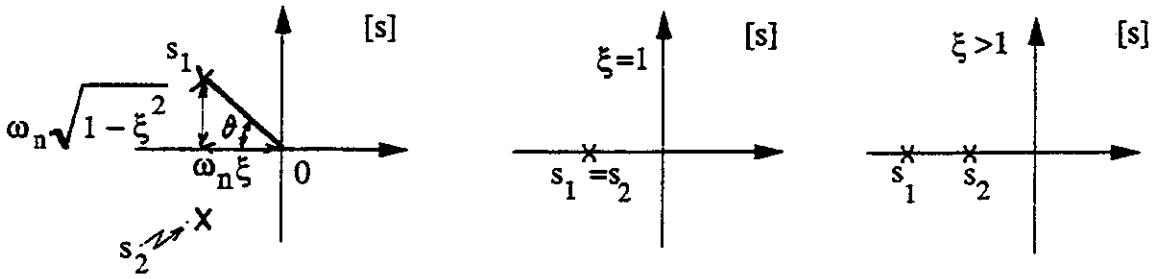
הקוטב של מערכת מסדר ראשון (7.53), נתון על ידי $s = -1/\tau$. קוטב זה נמצא תמיד על הציר הממשי השלילי במישור s (ראה ציור 8.2).



ציור 8.2

במערכות מסדר שני (7.57) תלוי מקום שני הקטבים במנת הרסון ξ:

$$s_{1,2} = \begin{cases} -\omega_n[\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2}] & \xi < 1 \\ -\omega_n & \xi = 1 \\ -\omega_n[\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}] & \xi > 1 \end{cases}$$



ציור 8.3

עבור $\xi < 1$ (מערכת תת-מרוסנת) מתקבלים שני קטבים קומפלקסיים צמודים כאשר $Re(s_i) = -\omega_n\xi$ ו-

$Im(s_i) = \pm\,\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ (ראה ציור 8.3).

מכאן אנו למדים ש:

א. $|OS_1| = |OS_2| = \omega_n$

ב. $\cos\theta = \xi$ (או $\xi = \cos^{-1}\theta$)

דהיינו ככל ש-ξ קטן יותר הזוית θ גדולה יותר ולהפך, ככל שהמערכת מרוסנת יותר כך הזוית θ קטנה יותר.

8.1.3 מערכת MIMO

להגדרת קטבים ואפסים במערכות MIMO נדרש רקע נוסף בתורת מטריצות פולינומיאליות, שהוא מעבר להיקף הקורס הנוכחי. נסתפק לכן בהגדרות חלקיות.

באם מערכת MIMO נתונה על ידי מטריצת התמסורת, $G(s)$ (מסדר $r \times m$) נגדיר :

משוואה אפינית $\Delta(s)$: המכנה המשותף הקטן ביותר של כל מכני המינורים של $G(s)$.

קטבים : שרשי המשוואה האופינית $(\Delta(s) = 0)$

אפסים : שרשי פולינום האפסים אשר הוא המחלק המשותף הגדול ביותר של מוני כל המינורים מסדר הדרגה הנורמלית של $G(s)$ (כאשר כל מכני המינורים הם $\Delta(s)$)

הערה: כאשר $G(s)$ מטריצה רבועית (מס' כניסות = מס' יציאות : $m = r$) יהיו האפסים של $G(s)$ שרשי הפולינום $\psi(s)$ כאשר :

$$\det G(s) = \frac{\psi(s)}{\Delta(s)} \tag{8.8}$$

שים לב שהמכנה של $\det G(s)$ ב-(8.8) חייב להיות $\Delta(s)$.

דוגמא 2 : מטריצת תמסורת של מערכת בעלת שתי כניסות ושני יציאות נתונה על ידי :

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} \tag{8.9}$$

המכנה המשותף הקטן ביותר של כל מכני המינורים מסדר 1 ב-$G(s)$ יהיה :

$$(s+1)(s+2) \tag{8.10}$$

המינור מסדר 2 של $G(s)$ יהיה $\det G(s)$ הנתון על ידי :

$$\det G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{2}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{\psi(s)}{\alpha(s)} \tag{8.11}$$

המכנה המשותף הקטן ביותר בין (8.10) ו-$\alpha(s)$ שב-(8.11) הוא $\alpha(s)$ לכן תהיה המשי האופינית :

$$\Delta(s) = (s+1)^2 (s+2) = 0$$

למערכת שלושה קטבים :

$$p_1 = p_2 = -1 \ ; \quad p_3 = -2$$

ואפס אחד (השורש של $\psi(s) = 0$) :

$$z_1 = -3$$

<u>דוגמא 3</u> : נתון $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} -s(s+1) & -(s+2)^2 \\ 16 & 0 \end{bmatrix}$$

מצא קטביה ואפסיה של $G(s)$.

קטבים :

מכנה משותף של מינורים מסדר ראשון : $(s+2)(s+3)$

מכנה מינור מסדר שתיים : $(s+3)^2$ לפי :

$$\det G(s) = \frac{16(s+2)^2}{(s+2)^2(s+3)^2} = \frac{16}{(s+3)^2}$$

מכאן :

$$\Delta(s) = (s+2)(s+3)^2$$

למערכת שלושה קטבים : $s_1 = s_2 = -3 \;;\; s_3 = -2$

אפסים :

הדרגה הנורמלית של $G(s)$ היא 2 . לכן קיים מינור אחד מסדר שתיים והוא $\det G(s)$. מכאן :

$$\det G(s) = \frac{\psi(s)}{\Delta(s)} = \frac{16}{(s+3)^2} \cdot \frac{s+2}{s+2}$$

למערכת אפס אחד ב-$s = -2$.

שים לב כי במערכות MIMO יתכן שלמערכת יהיו קוטב ואפס באותו מקום בלי שיצטמצמו.

8.14 <u>יציבות אסימפטוטית חיצונית</u>

<u>הגדרה</u> : מערכת ליניארית סטציונרית הנתונה באמצעות פונקצית (או מטריצת) תמסורת כב-(8.1) תקרא : **יציבה אסימפטוטית חיצונית** אם ורק אם תגובתה לכניסת הלם דועכת לאפס עם הזמן באופן אקספוננציאלי.

בפרק 6 ראינו כי תגובת ההלם של מערכת נתונה על ידי $L^{-1}[G(s)]$ וכי היא כוללת סכום משוקלל של ביטויים מהצורה :

$$t^{k-1}e^{p_i t} \qquad (8.12)$$

כאשר p_i הוא קוטב ו-k מספר חזרותיו, מכאן :

משפט : מערכת ליניארית סטציונרית יציבה אסימפטוטית חיצונית אם ורק אם :

$$Re(p_i) < 0 \qquad i = 1,\dots,n \tag{8.13}$$

או אקוילנטית : אם ורק אם כל קטבי המערכת, p_i , נמצאים ב-OLHP של [s].

דוגמא 4 : למערכת

$$G(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

שני קטבים : $p_1 = -1 , \quad p_2 = -2$

הנמצאים ב-OLHP - המערכת יציבה אסימפטוטית חיצונית .

הערות:

1. ניתן להראות שמערכת יציבה אסימפטוטית חיצונית מקימת התכונות הבאות :

א. אם הכניסה חסומה, $|u(t)| < M_u < \infty$, אזי היציאה חסומה, $|y(t)| < M_y < \infty$. תכונה זו קרויה יציבות BIBO.(Bounded input bounded output).

ב. באם לכניסה אנרגיה סופית :

$$\int_0^\infty (u(t))^2 dt < K_u < \infty$$

אזי גם ליציאה אנרגיה סופית :

$$\int_0^\infty (y(t))^2 dt < K_y < \infty$$

2. יש לשים לב לעובדה שיציבות חיצונית נקבעת אך ורק לפי מקום הקטבים במשור [s]. באם אחד (או יותר) הקטבים נמצא ב-ORHP המערכת אינה יציבה אסימפטוטית חיצונית.

8.15 יציבות אסימפטוטית פנימית

יציבות אסימפטוטית פנימית מתיחסת לממוש המערכת.

הגדרה : המערכת אשר ממושה הוא :

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x \in R^n$$

$$y = Cx + Du \tag{8.14}$$

תהיה יציבה אסימפטוטית פנימית אם ורק אם הפתרון של המערכת החפשית :

$$\dot{x} = Ax\,; \qquad x(t_o) = x_o\,; \qquad t \geq t_o \tag{8.15}$$

דועך ל-0 עם הזמן עבור **כל** x_o .

פתרון (8.15), המבוטא באמצעות המודים (ראה פרק 4) , כלל סכום משוקלל של ביטויים מהצורה $t^{k-1}e^{\lambda_i t}$ כאשר λ_i הוא ערך עצמי של A ו-k מספר חזרותיו. כדי לקיים את ההגדרה הנ"ל נדרש לכן :

<u>משפט</u>: המערכת (8.14) תהיה יציבה אסימפטוטית פנימית אם ורק אם :

$$\mathrm{Re}(\lambda_i(A)) < 0 \qquad\qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{8.16}$$

או אקוילנטית : אם ורק אם כל הערכים העצמיים של A נמצאים ב-OLHP של [s].

<u>דוגמא 5</u> : נתון הממוש :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 5 + 4 = 0\,; \quad \lambda_1 = -4\,, \quad \lambda_2 = -1$$

והיות ו- $\lambda_i(A) < 0 \quad (i = 1,2)$ המערכת יציבה אסימפטוטית פנימית.

<u>הערה</u> : בפרק 3 ראינו כי מימושים מינימליים שונים של אותה מערכת קשורים באמצעות טרנספורמציות סימילריות. לכל המימושים לכן אותם ערכים עצמיים. מכאן ברור שהיציבות הפנימית אינה תלויה בממוש הספציפי.

8.1.6 <u>הקשר בין יציבות פנימית וחיצונית</u>

מערכת עשויה להיות יציבה חיצונית ולא יציבה פנימית. מקרה כזה יתרחש אם, למשל, מד לא יציב (הקשור לערך עצמי הנמצא ב-RHP) אינו מופיע ביציאה.

<u>דוגמא 6</u> : נתון הממוש :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

לפי המשפט ב-8.1.5 מערכת זו אינה יציבה פנימית (ע"ע : $\lambda = 5$). למרות זאת תגובת ההלם של המערכת הנתונה על ידי :

$$g(t) = Ce^{At}B = (\,1 \quad 0\,)\begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-2t}$$

ונדרך לאפס עם הזמן, ולפי 8.1.4 היתה יציבה חיצונית.

<u>דוגמא 7</u> : פונקצית התמסורת של המערכת בדוגמא 6 הינה :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s-5}{(s-5)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

מהדוגמא הנ"ל רואים שהסיבה להבדל בין היציבות החיצונית והפנימית נובעת מהצטמצמותו של הקוטב (הערך העצמי) הלא יציב (p=5) בתהליך יצירת פונקצית התמסורת. כתוצאה מכך אין לקוטב זה השפעה על היציבות החיצונית.

<u>מסקנה</u> : באם בתהליך קבלת פונקצית (או מטריצת) תמסורת מממוש נתון אין מתבטלים קטבים עם אפסים אזי מערכת יציבה חיצונית תהיה יציבה פנימית. (שים לב, כי מערכת יציבה פנימית תמיד יציבה חיצונית גם אם חלים ביטולים).

<u>הערה</u>: אם אין ביטולים יהיה הפולינום האופיני $\Delta(s)$ (מכנה $G(s)$) זהה ל:

$$\Delta(s) = \det(sI-A) \tag{8.17}$$

8.1.7 <u>קריטריון אלגברי ליציבות (קריטריון ראוט, Routh)</u>

במקרים בהם הפולינום האפיני $\Delta(s)$ (או $\det(sI-A)$) הינו פולינום מסדר גבוה לא ניתן, או קשה, לפתור את המשואה האופינית ולמצוא מפורשות את קטבי המערכת. מטרת הקריטריונים האלגבריים היא לקבוע באם הקטבים (או העיע) נמצאים או לא נמצאים, ב-RHP מבלי לפתור את המשואה האופינית.

נטפל במשואה אפינית :

$$\Delta(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i = 0, \quad a_i \in R \tag{8.18}$$

מבלי לאבד מהכלליות נניח : $a_n = 1$. היות והמקדמים a_i הינם ממשיים אזי לכל שורש מדומה של (8.18) יהיה גם השורש הצמוד לו.

<u>משפט</u> : תנאי הכרחי (אך לא מספיק) לכך שכל שרשי (8.18) יהיו ב-OLHP הוא :

$$a_i > 0 \quad \forall\, i \tag{8.19}$$

<u>הוכחה</u> : אם ל-(8.18) שורשים ממשיים $s = -\alpha_k$ ושורשים מדומים $s = -\beta_i \pm j\gamma_i$, כולם ב-OLHP (דהייט $\alpha_k > 0$ ו-$\beta_i > 0$) נוכל לכתוב :

$$\Delta(s) = \prod_k (s+\alpha_k) \prod_i (s+\beta_i + j\gamma_i)(s+\beta_i - j\gamma_i) =$$
$$= \prod_k (s+\alpha_k) \prod_i (s^2 + 2\beta_i s + \beta_i^2 + \gamma_i^2) \qquad (8.20)$$

היות וכל המקדמים באגף הימני של (8.20) חיוביים נקבל ש-(8.19) מתקיים.

<u>הערה</u> : מההוכחה ברור כי תנאי (8.19) הוא **גם תנאי מספיק ליציבות** עבור $n \le 2$.

<u>טבלת Routh</u>:

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	$\cdots$	מתוך המשוואה האופינית
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	$\cdots$	
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	$\cdots$		
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	$\cdots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
s^1	q_1	0				
s^0	h_1	0				
	עמודת ראוט					

בטבלת ראוט $n+1$ שורות כאשר n הוא סדר $\Delta(s)$. שתי השורות הראשונות מורכבות ממקדמי $\Delta(s)$.

את המקדמים b_i , c_i . . . מחשבים כדלהלן :

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad ; \quad b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \qquad (8.21)$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1} \quad ; \quad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1} \qquad (8.22)$$

<u>משפט</u> : למשואה האופינית (8.18) יהיו שרשים אך ורק ב-OLHP אם ורק אם כל האברים שבעמודת ראוט הינם חיוביים לחלוטין.

<u>משפט</u> : אם כל האברים בעמודת ראוט שונים מאפס, אזי מספר חילופי הסימן בסדרת המספרים המהווים את עמודת ראוט שווה למספר השרשים של (8.18) ב-ORHP .

<u>הערה</u> : ניתן לחלק שורה שלמה בטבלה במספר חיובי מבלי לפגוע במסקנות.

<u>דוגמא 8</u> : $\Delta(s) = s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 4$

נבנה את טבלת ראוט :

s^4	1	1	4
s^3	~~2~~1	~~4~~2	0
s^2	-1	4	0
s^1	6	0	
s^0	4		

<u>מסקנות</u> : יש שני חלופי סימן בעמודת ראוט לכן

שני שורשים ב-RHP והמערכת אינה יציבה.

<u>הערות</u>:

1. כדי למצוא את מספר השרשים של $\Delta(s)$ ב-LHP נציב $s = -x$ ב-$\Delta(s)$, נקבל פולינום חדש ב-x ועליו נפעיל את הקריטריון.
2. כדי למצוא את מספר השרשים מימין לקו $s = -a$ $(a > 0)$ נציב ב-$\Delta(s)$ $s = x - a$ ונפעיל את הקריטריון על הפולינום ב-x .

<u>מקרים סינגולריים</u>

במקרים מסוימים יופיע 0 בעמודת ראוט, או שורה שלמה בטבלה ותתאפס. במקרים אלו המערכת אינה יציבה. אם מעוניינים ללמד על מיקום השורשים ניתן להמשיך ולבנות את טבלת ראוט בדרך הבאה :

מקרה א': <u>אפס בעמודה</u> - מציבים מספר חיובי קטן, $\varepsilon > 0$, במקום ה-0 וממשיכים למציאת מספר חלופי הסימן.

<u>דוגמא 9</u> : $\Delta(s) = s^5 + 2s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 3s + 2$

טבלת ראוט מוצגת להלן. כל השורה השניה חולקה ב-2. את ה-0 בעמודת ראוט בשורה השלישית מחליפים ב-ε. מהחשוב מקבלים :

s^5	1	4	3
s^4	$\cancel{2}_1$	$\cancel{8}_4$	$\cancel{2}_1$
s^3	$\cancel{0}_\varepsilon$	2	0
s^2	a	1	0
s^1	b	0	
s^0	1		

$$a = 4 - 2/\varepsilon$$

$$b = 2 - \frac{\varepsilon}{4 - 2/\varepsilon}$$

עבור ε חיובי קטן : $a < 0$ ו-$b > 0$.

<u>מסקנה</u> : שני חילופי סימן - שני שרשים ב-RHP - המערכת אינה יציבה אסימפטוטית.

<u>מקרה ב'</u> : <u>שורה שלמה מתאפסת</u> - התאפסות שורה מלמדת כי למשואה האופינית שורשים הממוקמים באופן רדיאלי סימטרי ביחס לראשית במשור [s]. שורשים אלו עשויים להיות ממשיים, מדומים או מרוכבים. אם שורשים אלו חוזרים m פעמים יופיעו בטבלת ראוט m שורות של אפסים.

כדי להמשיך ולבנות את הטבלה, בונים פולינום עזר $\psi(s)$ ממקדמי השורה הקודמת לזו שהתאפסה. בפולינום זה החזקה הגבוהה ביותר של s היא "דרגת השורה" הקודמת, (ראה דוגמא 10), וחזקת הפולינום יורדת ב-2 משמאל לימין. את השורה שהתאפסה מחליפים במקדמי הפולינום $\frac{d\psi(s)}{ds}$ וממשיכים כמקודם.

<u>דוגמה 10</u> :

$$\Delta(s) = s^5 + 2s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 4s + 8$$

בדוגמא זו מתאפסת השורה (s^3) השלישית.

הפולינום $\psi(s)$ יהיה לכן :

$$\psi(s) = s^4 + 5s^2 + 4$$

s^5	1	5	4
s^4	$\cancel{2}_1$	$\cancel{10}_5$	$\cancel{8}_4$
s^3	0	0	0
s^3	4	10	0 ← שורה חדשה
s^2	5 / 2	4	
s^1	18 / 5	0	
s^0	4		

$$\frac{d\psi(s)}{ds} = 4s^3 + 10s$$

ממקדמי $\frac{d\psi(s)}{ds}$ מרכיבים את השורה החדשה (s^3) .

מהתאפסות השורה השלישית המקורית ברור שהמערכת אינה יציבה אסימפטוטית.

היות ולאחר החלפת השורה השלישית אין חילופי סימן, אין אמנם שורשים ב-ORHP אבל יש שרשים על הציר המדומה, $j\omega$.

הערות:

1. ניתן להראות שפולינום העזר $\psi(s)$ הינו גורם של הפולינום האופיני $\Delta(s)$. פרוש הדבר ששרשי $\psi(s)$ הם גם שרשי $\Delta(s)$. ל-$\psi(s)$ שבדוגמא 10 ארבעת השורשים הבאים:

$$p_1 = j\,;\quad p_2 = -j\,;\quad p_3 = 2j\,;\quad p_4 = -2j$$

וכל זוג ממוקם אמנם באופן רדיאלי סימטרי ביחס לראשית.

2. שורה בעלת איבר יחיד שתתאפס תיכלל במקרה ב'.

8.2 מערכות בדידות

8.2.1 קוטב, אפס ופולינום אפיני

הגדרות הקוטב, האפס והפולינום האפיני זהות לאלו שבמערכות רציפות. כך למשל, אם מערכת בדידה מיוצגת על ידי פונקצית התמסורת:

$$G(z) = \frac{\sum_{i=o}^{m} b_i z^i}{\sum_{i=o}^{n} a_i z^i} = \frac{b_m \prod_{i=1}^{m} (z - z_i)}{a_n \prod_{i=1}^{n} (z - p_i)} \tag{8.23}$$

יהיו $\Delta(z)$:

$$\Delta(z) = \sum_{i=o}^{n} a_i z^i = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - p_i) \tag{8.24}$$

הפולינום האופיני ו-

$$\Delta(z) = 0$$

המשואה האופינית. כמו כן:

$z = z_i$; $i = 1,\dots,m$ - הינם **האפסים** של $G(z)$

$z = p_i$; $i = 1,\dots,n$ - הינם **הקטבים** של $G(z)$

הערה: ההגדרות שניתנו בסעיף 8.1.3 תופסות גם במערכות בדידות אם מחליפים את s ב-z.

8.2.2 <u>יציבות חיצונית ויציבות פנימית</u>

כללית, מתאימות הגדרות של יציבות אסימפטוטית חיצונית ופנימית שניתנו למערכות רציפות גם למערכות בדידות עם שינויים ברורים. כפי שנראה להלן, גם משפטי היציבות מתאימים למערכות בדידות אם מחליפים בהם את ה-OLHP במשור [s] בפנים מעגל היחידה במשור [z]. (Open unit disk OUD).

<u>יציבות חיצונית</u>

תגובת ההלם $g(k)$ של מערכת המתוארת על ידי (8.23) הינה :

$$g(k) = Z^{-1} G(z)$$

והיא מכילה ביטויים מהצורה ,

$$k^q (p_i)^k$$

מכאן :

<u>משפט (היציבות האסימפטוטית החיצונית)</u> : מערכת בדידה, ליניארית וסטציונרית, הנתונה על ידי $G(z)$ (8.23) , יציבה אסימפטוטית חיצונית אם ורק אם כל קטביה מקיימים :

$$|p_i| < 1 \qquad i = 1,\dots,n \tag{8.25}$$

או אקוילנטית : אם ורק אם כל קטביה נמצאים בתוך מעגל היחידה הפתוח (ב-OUD) במשור הקומפלקסי [z] .

<u>יציבות פנימית</u>

תהיה המערכת הבדידה נתונה על ידי המימוש :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) , \qquad x \in R^n$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \tag{8.26}$$

בפתרון המערכת החפשית :

$$x(k+1) = Ax(k) \tag{8.27}$$

באמצעות המחרים, מופיעים ביטויים מהצורה :

$$k^q \lambda_i^k \tag{8.28}$$

<u>משפט (היציבות האסימפטוטית הפנימית)</u> : המערכת הבדידה המוצגת על ידי הממוש (8.26) יציבה אסימפטוטית פנימית אם ורק אם :

$$|\lambda_i(A)| < 1 \qquad i = 1,\dots,n \tag{8.29}$$

או : אם ורק אם כל הערכים העצמיים, $\lambda_i(A)$, של מטריצת המערכת, A , מצויים בתוך ה-OUD במשור הקומפלקסי [z].

<u>הערה</u> : הקשרים בין יציבות פנימית וחיצונית במערכות בדידות זהים לאלו שבמערכות רציפות (ראה 8.1.6).

<u>דוגמא 11</u> : מערכת בדידה נתונה באמצעות משואת ההפרשים :

$$y_{k+2} - 2.5\, y_{k+1} + y_k = u_{k+1} - 2u_k$$

האם המערכת יציבה אסימפטוטית חיצונית ? פנימית ?

את פונקצית התמסורת של המערכת נמצא על ידי התמרת z של משואת ההפרשים ונקבל :

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{z-2}{(z-2)(z-1/2)} = \frac{1}{z-1/2}$$

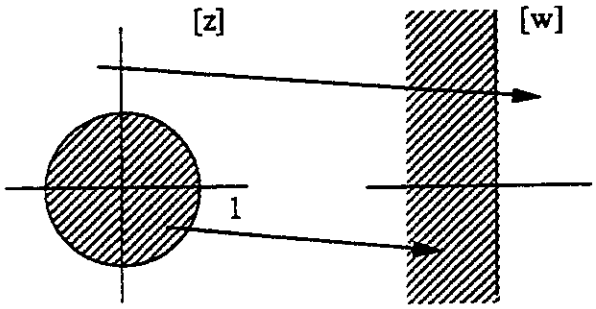
מכאן שהמערכת יציבה אסימפטוטית חיצונית (קוטב אחד בתוך ה-UD) ואיננה יציבה פנימית (ע"ע נוסף מחוץ ל-UD).

8.2.3 <u>שמוש בקריטריון ראוט לבדיקת יציבותן של מערכות בדידות</u>

כיון שהקריטריון הנ"ל מאפשר קביעת הימצאותם של שורשי פולינום ב-LHP וב-RHP , לא ניתן להשתמש בו ישירות למערכות בדידות, דהיינו, לקביעת המצאותם של שורשים בתוך מעגל היחידה או מחוצה לו.

ניתן בכל זאת להשתמש בקריטריון ראוט למערכות בדידות אם מבצעים העתקה של $\Delta(z)$ ל-$\Delta(w)$, ממשור z למשור w , באמצעות **ההעתקה הבילינאריית**.

ההעתקה מעבירה את פנים מעגל היחידה במשור z ל-OLHP של משור w (ראה ציור 8.2).



ציור 8.2

ההעתקה הבילינאריית המתאימה לצרכינו נתונה על ידי הקשר הבא :

$$z = \frac{1+w}{1-w} \tag{8.30}$$

במקום כל z במשואה האפיינית $\Delta(z) = 0$, נציב את (8.30) ונקבל :

$$\Delta(z) = \frac{\bar{\Delta}(w)}{(1-w)^n} = 0 \qquad (8.31)$$

כל שורש של $\Delta(z) = 0$ הנמצא בתוך מעגל היחידה יועתק לשורש של $\bar{\Delta}(w)$ ב-LHP במשור w, וכל שורש של $\Delta(z)$ מחוץ למעגל היחידה יועתק לשורש של $\bar{\Delta}(w)$ ב-RHP . על $\bar{\Delta}(w) = 0$ נפעיל את קריטריון ראוט.

<u>דוגמא 12</u> : קבע את יציבותה ואת מקום קטביה של המערכת אשר משואתה האפינית נתונה על ידי :

$$\Delta(z) = 2z^2 + 3z - 2$$

אם נציב את (8.30) ב-$\Delta(z)$ נקבל :

$$\Delta(z) = 2\frac{(1+w)^2}{(1-w)^2} + \frac{3(1+w)}{1-w} - 2 = \frac{-3w^2 + 8w + 3}{(1-w)^2} = \frac{\bar{\Delta}(w)}{(1-w)^2}$$

ל-$\bar{\Delta}(w)$ הנ"ל נבנה את טבלת ראוט :

w^2	-3	$+3$
w^1	8	0
w^0	$+3$	

כיוון שבעמודת ראוט חלוף סימן אחד, פרוש הדבר ששורש אחד של $\bar{\Delta}(w)$ ב-RHP ואחד ב-LHP של משור [w] . ומכאן :

המערכת אינה יציבה (קוטב אחד מתוך השניים מחוץ למעגל היחידה).

8.2.4 <u>תנאים הכרחיים (ישירות על $\Delta(z)$)</u>

קימים קריטריונים אלגבריים לבדיקת יציבות במשור z ללא צורך בהעתקה הבילינאיריות ושמוש בקריטריון ראוט. תנאים אלו הם מחוץ לחומר קורס זה. נציג את התנאים ההכרחיים בלבד ללא הוכחה.

<u>משפט</u> : נתונה המשואה האפינית : $\Delta(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ (עם $a_n > 0$) .

תנאים הכרחיים (אך לא מספיקים) להמצאות כל שרשי $\Delta(z)$ בתוך ה-OUD הם :

$$\Delta(1) > 0 \qquad (8.32)$$

$$(-1)^n \Delta(-1) > 0 \qquad (8.33)$$

8.2.5 <u>תנאים הכרחיים ומספיקים למערכת מסדר שני</u>

נתונה המשוואה האפינית מסדר שני :

$$\Delta(z) = a_0 + a_1 z + z^2$$

נוכיח כי תנאים הכרחיים ומספיקים להמצאות שרשי $\Delta(z)$ ב-OUD הם (8.32), (8.33) ו-$a_0 < 1$.

<u>הוכחה</u> : נשתמש בהתמרה הביליניארית :

$$\Delta(z) = \Delta(z = \frac{1+w}{1-w}) = a_0 + a_1 \frac{1+w}{1-w} + (\frac{1+w}{1-w})^2$$

מכאן :

$$\bar{\Delta}(w) = w^2(1 - a_1 + a_0) + w(1-a_0) \cdot 2 + (1+a_1+a_0)$$

על מנת ששרשי $\bar{\Delta}(w)$ ימצאו ב-OLHP במשור w דרוש שכל מקדמי $\bar{\Delta}(w)$ יהיו חיוביים לחלוטין (קריטריון ראוט למערכת מסדר שני).

ומכאן :

(תנאי (8.32) $\Delta(1) > 0$) $\qquad 1 + a_1 + a_0 > 0$

(תנאי (8.33) $\Delta(-1) > 0$) $\qquad 1 - a_1 + a_0 > 0$

ו- $\qquad a_0 < 1$

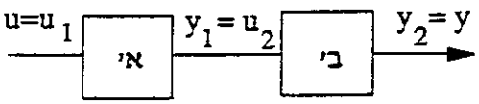
8.3 <u>דוגמא : (חלק משאלה מבחינת סמסטר תשמ"ג)</u>

נתונים ממושים של שתי מערכות פשוטות :

<u>מערכת אי</u>	<u>מערכת בי</u>
$\dot{x}_1 = -x_1 + u_1$	$\dot{x}_2 = 2x_2 + u_2$
$y_1 = -3x_1 + u_1$	$y_2 = x_2$

א. האם כל אחת מהמערכות יציבה אסימפטוטית פנימית, חיצונית ?

ב. מחברים את שתי המערכות בטור כמוראה בציור. האם המערכת השקולה יציבה אסימפטוטית פנימית ו/או חיצונית ?



מערכת שקולה

ציור 8.3

ג. מצא את $x_1(t)$ ואת $x_2(t)$ $(t \geq 0)$ כאשר המערכות מתוברות בטור, אם נתון : $x_1(0) = x_2(0) = 1$ ו-$(t \geq 0)$ $u(t) = 0$, מהם $x_1(t)$ ו-$x_2(t)$ עבור $t \to \infty$. האם תשובתך כאן סותרת את ממצאיך בסעיף ב'.

פתרון :

א. למערכת א' עיע $\lambda_1 = -1 < 0$ מערכת א' יציבה פנימית ולכן אף יציבה חיצונית. למערכת ב' עיע $\lambda_2 = +2 > 0$ (ב-ORHP). מערכת ב' אינה יציבה אסימפטוטית פנימית. כדי לבדוק יציבות חיצונית נמצא את $G_2(s)$ $(\frac{y_2(s)}{u_2(s)} =)$, $G_2(s) = 1(s-2)^{-1}1 = \frac{1}{s-2}$

מערכת ב' אינה יציבה אסימפטוטית חיצונית - הקוטב - $p = 2$ (ב-ORHP).

ב. נמצא את $G_1(s)$:

$$G_1(s) = -3(s+1)^{-1} \cdot 1 + 1 = \frac{-3}{s+1} + 1 = \frac{s-2}{s+1}$$

פונקציית התמסורת, $G(s)$, של המערכת השקולה תהיה (ראה (7.40)) :

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = G_2(s) \cdot G_1(s) = \frac{1}{s-2} \cdot \frac{s-2}{s+1} = \frac{1}{s+1}$$

היות ולמערכת השקולה קוטב אחד ב-OLHP (הקוטב השני הצטמצם) - המערכת השקולה יציבה אסימפטוטית חיצונית. המערכת השקולה אינה יציבה אסימפטוטית פנימית כי אחד מקטביה (s=2) נמצא ב-RHP .

זאת גם ניתן לראות בדרך אחרת. נמצא את הממוש האקוילנטי (ראה סעיף 7.6) .

נשתמש בקשר :

$$u_2 = y_1$$

ונקבל :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 + y_1 = 2x_2 - 3x_1 + u \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

כאשר בקשרים הנ"ל הגדרנו (ראה ציור 8.3) :

$$u \stackrel{\Delta}{=} u_1$$

$$y \stackrel{\Delta}{=} y_2$$

כבסעיף 7.6 , נגדיר וקטור מצב מורחב על ידי :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ונקבל ממוש עבור המערכת השקולה :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (0 \quad 1)\, x$$

נמצא הערכים העצמיים של המערכת השקולה :

$$|\lambda I - A| = (\lambda+1)(\lambda-2) = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \quad , \quad \lambda_2 = 2$$

היות ו-λ_2 מצוי ב-RHP המערכת אינה יציבה אסימפטוטית פנימית.

ג. נמצא מהממוש של המערכת השקולה את פתרון המערכת החפשית.

$$e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = L^{-1}\frac{\begin{pmatrix} s-2 & 0 \\ -3 & s-1 \end{pmatrix}}{(s+1)(s-2)} = L^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-2} & \frac{1}{s-2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{+2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

לכן :

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{At}x_o = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

ו-

$$x(t \to \infty) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

תוצאה זו, לכאורה, פרושה שהמערכת השקולה יציבה פנימית שכן x(t) דועך לאפס מתנאי התחלה. אבל תנאי ההתחלה הנתון הוא מיוחד - הוא בכוון המוד הקשור לע"ע היציב ($\lambda_i = -1$), בעוד שבהגדרה נדרש שהפתרון ידעך ל-0 מכל תנאי התחלה. מכאן שתוצאה זו אינה סותרת את ממצאינו בסעיף ב'.

8.4 שמוש במשפטי הערך הסופי

בפרק 6, היכרנו את משפטי הערך הסופי למערכות רציפות ובדידות. משפטים אלו מאפשרים למצוא את $y(t\to\infty)$ מידיעת $Y(s)$ (או $Y(z)$) ללא צורך בבצוע התמרות הפוכות במידה ול-$y(t\to\infty)$ קיים גבול קבוע. מפרק זה ברור לכן כי ניתן להשתמש במשפטי הערך הסופי במידה ו-$G(s)$ יציבה אסימפטוטית ובאם הכניסות חסומות או בעלות אנרגיה סופית ושואפות אסימפטוטית לקבוע.

<u>דוגמה</u> : מטריצת התמסורת של מערכת נתונה על ידי :

$$G(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{s-2}{s^3+2s^2+3s+8}\\[2ex]\dfrac{3s+1}{s^2+2s+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_1(s)\\g_2(s)\end{pmatrix}$$

מצא את $y(\infty)$ אם $u(t)=\delta(t)$.

פתרון :

$$\begin{pmatrix}y_1(s)\\y_2(s)\end{pmatrix}=y(s)=G(s)\ u(s)=G(s)$$

היות ו-$g_2(s)$ יציבה אסימפטוטית (מכנה מסדר שני אשר כל מקדמיו חיוביים) ו-$g_1(s)$ אינה יציבה (בדוק) ניתן להפעיל את משפט הערך הסופי **רק** עבור היציאה y_2 :

$$y_2(t\to\infty)=\lim_{s\to 0} s\ g_2(s)=0$$

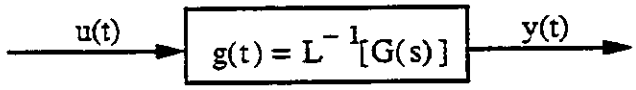
היציאה $y_1(t\to\infty)$ תתבדר ובתלות במקום קטבי $g_1(s)$ תהיה ∞ או $-\infty$ או תתנדנד באמפליטודה אינסופית.

פרק 9 : תגובת תדירות

בפרק זה נטפל באחד הכלים החשובים לאפיון ותכנון מערכות ליניאריות. כללית, תגובת תדירות הינה התגובה במצב מתמיד של מערכת ליניארית יציבה לכניסה מחזורית. המערכות תהיינה מיוצגות על ידי פונקציות (או מטריצות) התמסורת.

9.1 מערכות רציפות

תהיה מערכת SISO נתונה על ידי פונקצית התמסורת $G(s)$ (ראה ציור 9.1),



ציור 9.1

כאשר $G(s)$ היא :

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\prod_{i=1}^{n} (s - p_i)} \qquad (9.1)$$

נניח כי ב-$G(s)$ אין כל ביטולים של אפסים עם קטבים.

9.1.1 משפט תגובת התדירות: באם המערכת, $G(s)$ **יציבה אסימפטוטית** אזי הכניסה :

$$u(t) = a \sin \omega t$$

גוררת **במצב מתמיד** את היציאה :

$$y_{ss}(t) = a \mid G(j\omega) \mid \sin(\omega t + \arg G(j\omega)) \qquad (9.2)$$

הוכחה: נניח כניסה הרמונית:

$$u(t) = ae^{j\omega t} = a(\cos \omega t + j \sin \omega t) \qquad (9.3)$$

כך ש-

$$u(s) = L[u(t)] = \frac{a}{s - j\omega} \qquad (9.4)$$

היציאה המותמרת, $Y(s)$, תהיה לכן :

$$Y(s) = G(s)\, U(s) = G(s) \cdot \frac{a}{s - j\omega} \qquad (9.5)$$

פרוק האגף הימני של משואה (9.5) לשברים חלקיים יתן :

$$y(t) = L^{-1}\{G(s) \frac{a}{s - j\omega}\} = L^{-1}[\frac{\alpha}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{s - p_i}] \qquad (9.6)$$

כאשר $(i = 1,\dots,n)$ p_i, הם קטבי $G(s)$. ולפי הנתון,

$$\mathrm{Re}(p_i) < 0 \tag{9.7}$$

מ-(9.6) נקבל :

$$y(t) = \alpha e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i e^{p_i t} \tag{9.8}$$

ועקב (9.7) ,

$$y_{ss}(t) = y(t \to \infty) = \alpha e^{j\omega t} \tag{9.9}$$

שכן כל האקספוננטים $e^{p_i t}$ ידעכו ל-0 עם t.

נמצא את α בפרוק לשברים חלקיים שב-(9.6) :

$$\alpha = (s - j\omega) \cdot G(s) \frac{a}{s - j\omega} \Big|_{s = j\omega} = aG(j\omega) \tag{9.10}$$

היות ו-$G(j\omega)$ מספר קומפלקסי, נצינו בהצגתו הפולרית,

$$\alpha = a \,|\, G(j\omega) \,|\, e^{j(\arg G(j\omega))} \tag{9.11}$$

כאשר :

$$\arg G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\mathrm{Im}\, G(j\omega)}{\mathrm{Re}\, G(j\omega)} \tag{9.12}$$

נציב את (9.11) ב-(9.9) ונקבל :

$$y_{ss}(t) = a\,|G(j\omega)|\, e^{j(\arg G(j\omega))} \cdot e^{j\omega t} =$$

$$= a\,|G(j\omega)|\,[\cos(\omega t + \arg G(j\omega)) + j \sin(\omega t + \arg G(j\omega))] \tag{9.13}$$

מ-(9.13) נובע שהתגובה במצב מתמיד לכניסה $u(t) = a \sin \omega t$ נתתה על ידי (9.2) .

מ.ש.ל.

9.1.2 <u>מסקנות מהמשפט</u>

1. התגובה במצב מתמיד של מערכת ליניארית לכניסה סינוסואידלית, $a \sin \omega t$, היא סינוסואידלית **באותה** תדירות, ω, אבל בשני שינויים:

   א. אמפליטודה שונה.

   ב. הזזת פאזה.

2. היחס בין אמפליטודת היציאה לאמפליטודת הכניסה (הנקרא Amplitude Ratio ויסומן להלן - AR) נתון על ידי :

$$AR = |G(j\omega)| \tag{9.14}$$

והזזת הפאזה (פגור הפאזה - phase lag) שתסומן להלן ב-ϕ נתונה על ידי :

$$\phi = \arg G(j\omega) \tag{9.15}$$

9.1.3 א. שני הגדלים כפונקציה של התדירות ω $(0 \le \omega < \infty)$:

(1) **יחס האמפליטודות** $AR(\omega)$, ו-(2) **הזזת הפאזה** $\phi(\omega)$, מגדירים חד משמעית את תגובת התדירות של המערכת.

ב. כדי לקבל, לכן, את תגובת התדירות של מערכת, מציבים $j\omega$ במקום כל s ב-$G(s)$, ומחשבים את AR לפי (9.14) ואת ϕ לפי (9.15).

ג. תגובת התדירות נותנת בידינו אינפורמציה על תכונות המערכת במשור התדר. מיחס האמפליטודות, $AR(\omega)$, ניתן לקבוע מהם תחומי התדירות בהן המערכת מגבירה $(AR > 1)$ ובאילו תדירויות היא מנחיתה, או מסננת $(AR < 1)$. כפי שהוסבר בסעיף 6.5.2 לכל פונקציה (כניסה) תוכן תדירותי. אם עיקר תוכן זה מרוכז באזור ההגברה של תגובת התדירות של המערכת, יועבר אות הכניסה ליציאה. במידה ולא, יונחת אות הכניסה (או יסונן) והשפעתו על היציאה מהמערכת תהיה קטנה. נעיר עוד, שלתגובת התדירות חשיבות בקביעת היציבות של מערכות משוב. על מערכות משוב אין אנו עומדים בקורס זה.

<u>הערות</u> :

1) אם מספר האפסים m , (ראה (9.1) , קטן ממספר הקטבים, n, נקבל :

$$\lim_{\omega \to \infty} |G(j\omega)| = 0 \tag{9.16}$$

2) אם המערכת נתונה באמצעות ממוש במרחב המצב (A,B,C,D), יהיה $G(j\omega)$ נתון על ידי :

$$G(j\omega) = C(j\omega - A)^{-1}B + D \tag{9.17}$$

9.1.4 <u>תגובת התדירות של מערכת MIMO</u>

תהא מערכת MIMO בעלת m כניסות ו-r יציאות נתונה על ידי מטריצת התמסורת :

$$G(s) = \begin{pmatrix} g_{11}(s) & \dots & g_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{r1}(s) & \dots & g_{rm}(s) \end{pmatrix} \tag{9.18}$$

כאשר $g_{iq}(s)$ הינה פונקצית התמסורת בין הכניסה ה-q ליציאה ה-i .

מטריצת תגובת התדירות של המערכת מוגדרת כ-$G(j\omega)$ דהיינו :

$$G(j\omega) = \begin{pmatrix} g_{11}(j\omega) & \dots & g_{1m}(j\omega) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{r1}(j\omega) & \dots & g_{rm}(j\omega) \end{pmatrix} \tag{9.19}$$

אם הכניסה ה-q נתונה על ידי :

$$u_q(t) = a \sin\omega t$$

בעוד שאר הכניסות הם - 0, תהיה התגובה במצב מתמיד של כל אחת מהיציאות y_i $(i = 1, \dots, r)$

נתונה על ידי :

$$y_{i_{ss}}(t) = a|g_{iq}(j\omega)| \sin(\omega t + \arg(g_{iq}(j\omega))) \qquad i = 1, \dots, r$$

9.1.5 <u>דוגמא 1</u> : נתונה פונקצית התמסורת :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2}$$

מהי תגובת המערכת במצב מתמיד לכניסה $u(t) = 2\sin(2t)$?

נחשב $G(j\omega)$,

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)^2}$$

לכן,

$$AR = |G(j\omega)| = \frac{(4+\omega^2)^{1/2}}{1+\omega^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}(\omega/2) - 2\tan^{-1}(\omega)$$

ועבור $\omega = 2$,

$$AR = |G(j2)| = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

$$\phi_{\omega=2} = \tan^{-1}(1) - 2\tan^{-1}(2) = 45^o - 2 \cdot 63.43^o = -81.87^o = -1.43 \text{ rad}$$

תגובת המערכת במצב מתמיד תהיה לכן :

$$y_{ss}(t) = 2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{5} \sin(2t - 1.43)$$

9.1.6 <u>מערכות לא-מינימום פאזה</u> (Non-minimum phase systems)

<u>הגדרה</u> : פונקציית תמסורת רציונלית (מנה של שני פולינומים) בעלת קטבים ב-OLHP נקראת מינימום פאזה אם כל אפסיה ב-CLHP .

ולהיפך - פונקציית תמסורת רציונלית בעלת קטבים ב-OLHP תקרא **לא-מינימום פאזה**, אם אחד או יותר מאפסיה נמצאים ב-ORHP .

<u>הסבר</u> : הסיבה לשם לא-מינימום פאזה היא הבאה : נניח כי לפונקציית התמסורת $g(s)$ אפס אחד : $s = \alpha > 0$ (ב-ORHP). נוכל לבטא את $g(s)$ בצורה הבאה :

$$g(s) = \frac{\alpha - s}{\alpha + s}\, g_1(s) \tag{9.20}$$

כאשר $g_1(s)$ הוא מינימום פאזה.

עבור α ממשי נקבל :

$$\frac{\alpha - j\omega}{\alpha + j\omega} = e^{-2j\theta(\omega)} \tag{9.21}$$

כאשר :

$$\theta(\omega) = \tan^{-1}\frac{\omega}{\alpha} \tag{9.22}$$

ו-

$$\theta(\omega) > 0\,, \qquad \omega > 0 \tag{9.23}$$

ברור ש-

$$\left|\frac{\alpha - j\omega}{\alpha + j\omega}\right| = 1 \tag{9.24}$$

ולכן :

$$|\, g(j\omega)\,| = |\, g_1(j\omega)\,| \tag{9.25}$$

אבל :

$$\arg(g(j\omega)) < \arg(g_1(j\omega)) \tag{9.26}$$

שכן :

$$\arg(g(j\omega)) = \arg(g_1(j\omega)) - 2\theta(\omega)$$

משמעות (9.25) ו-(9.26) היא של-$g(s)$ ול-$g_1(s)$ אותו AR בכל התדירויות, אבל ל-$g(s)$, כתוצאה מהאפס ב-ORHP , פגוד פאזה גדול יותר מאשר ל-$g_1(s)$.

<u>הערות</u> :

1) מההסבר הנ"ל ברור כי אם נתונה $g(s)$ לא-מינימום פאזה עם אפס אחד ב-ORHP ($s = \alpha > 0$) הרי $g_1(s)$ מינימום פאזה המקיימת את (9.25) תהיה נתונה על ידי :

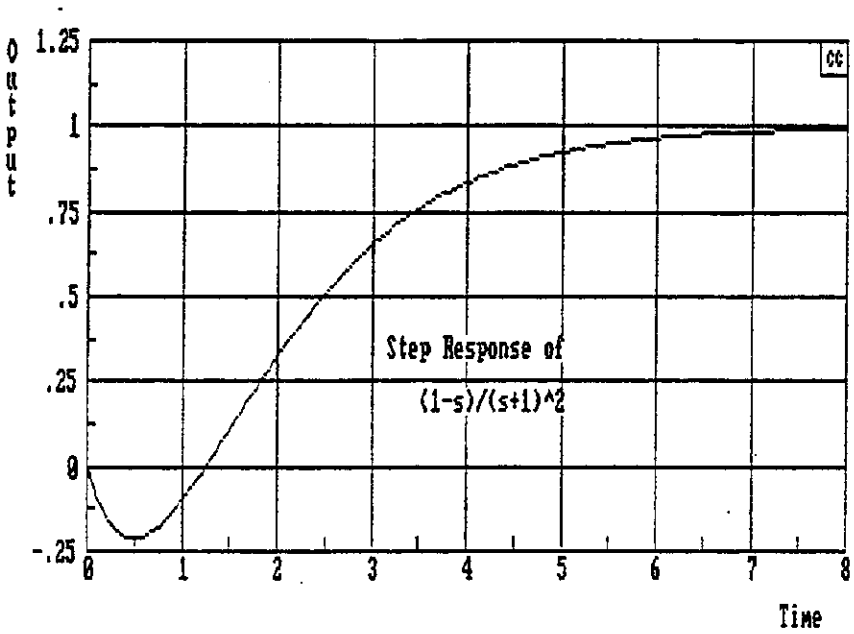
$$g_1(s) = \frac{\alpha + s}{\alpha - s} \cdot g(s) \qquad (9.27)$$

2) לפונקצית תמסורת $g(s)$ מינימום פאזה קוראים לעיתים **ברת-הפיכה** (invertible) היות ולהפכית של $g(s)$, $\frac{1}{g(s)}$, קטבים אך ורק ב-OLHP (כלומר $\frac{1}{g(s)}$ יציבה אסימפטוטית).

3) למערכות לא מינימום פאזה תגובות לכניסות מדרגה שונות מהרגיל. ניתן להראות כי למערכות להן מספר **אי-זוגי** של אפסים ב-RHP תגובת מדרגה הנקראת **תגובה הפוכה** (inverse response). בתחילה מגיבה המערכת בכוון הפוך לכיוון כניסת המדרגה ומאוחר יותר משנה התגובה סימן והולכת לקראת הערך במצב מתמיד. דוגמת תגובת מדרגה של המערכת

$$G(s) = \frac{1 - s}{(s + 1)^2}$$

מוצגת בציור .



4) מסיבות שלעיל גם פונקצית התמסורת הבאה :

$$g(s) = g_1(s)e^{-\theta s}$$

כאשר $g_1(s)$ היא רציונלית ובעלת קטבים ב-OLHP, נקראת לא-מינימום פאזה. ($e^{-\theta s}$ הינה התמרת לפלס של זמן מת, ראה משפט הזזה ממשית בפרק 6).

9.1.7 הקשר בין AR ו-ϕ

ניתן להראות כי **במערכות מינימום פאזה** הפאזה של $G(j\omega)$ ($\arg G(j\omega)$) נקבעת באופן יחידי מה-AR של $G(j\omega)$, $|G(j\omega)|$. תוצאה זו נוסחה והוכחה בסביבות 1940 על ידי ברדה (Bode). תרומה נוספת של ברדה בנושא תגובת התדר תובא בסעיף הבא.

מהתוצאה הנ"ל יוצא איפוא כי מידיעת ה-AR של מערכת מינימום פאזה ניתן לקבוע חד משמעית את פונקצית התמסורת של המערכת. במילים אחרות, לשתי מערכות מינימום פאזה שונות, AR שונים.

9.2 תאורים גרפיים של תגובת התדירות

את החומר שיובא להלן ניתן למצוא בכל ספר אלמנטרי העוסק במערכות ובבקרה. לכן נביא כאן רק את עיקרי הדברים.

9.2.1 תאור ברדה (Bode)

בתאור ברדה מתארים את ה-$AR(\omega)$ ואת ה-$\phi(\omega)$ בשני ציורים נפרדים כפונקציה של $\log\omega$ על גרף חצי לוגריתמי. את ה-AR מביעים בדרך כלל בדציבלים, db. הקשר בין ה-AR המתקבל מ-(9.14) לבין ערכו המתאים ב-db מוגדר על ידי:

$$(AR)_{db} \triangleq 20 \log_{10}(AR) \qquad (9.28)$$

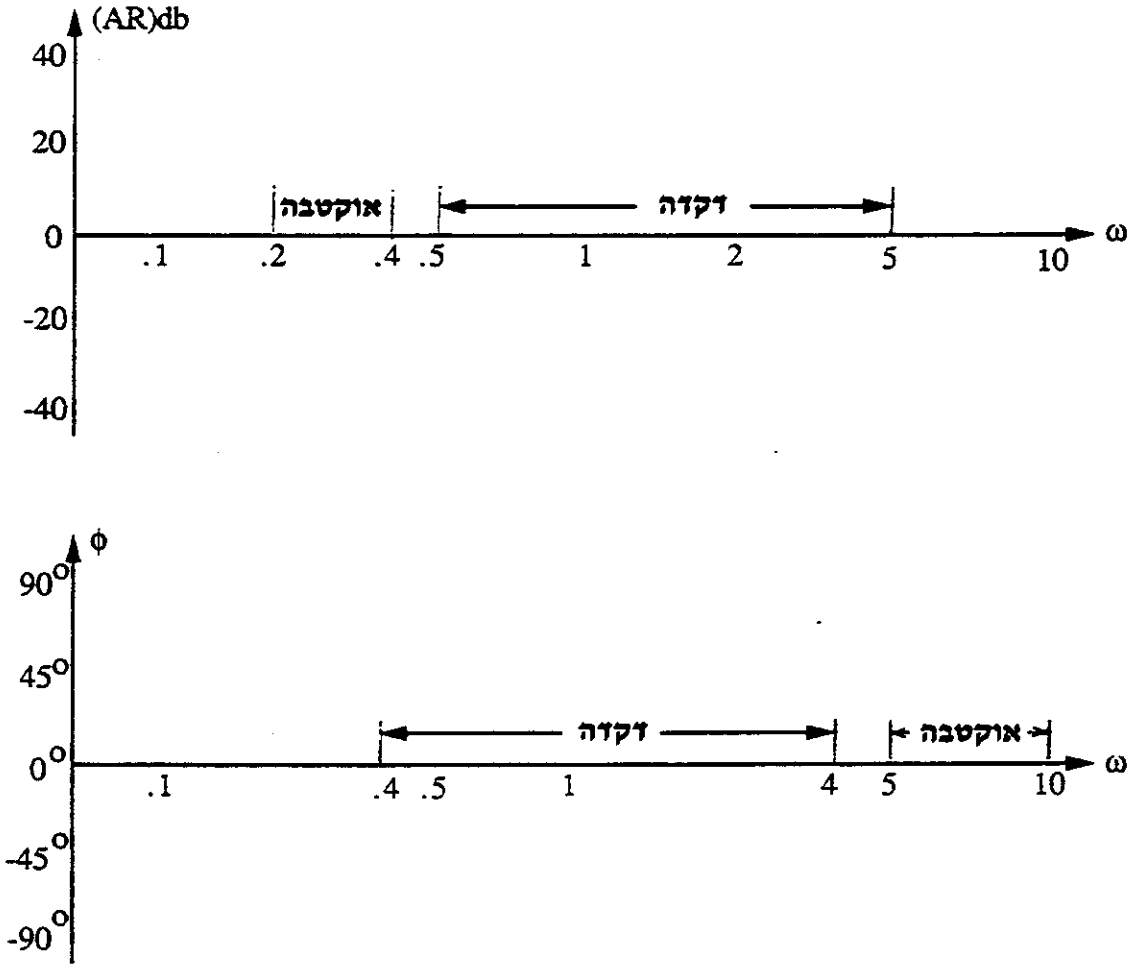
הטבלה הבאה מדגימה את (9.28).

AR	AR_{db}
0.01	-40
0.1	-20
0.5	-6
1.0	0
2.0	6
10.0	20
100.0	40

ציור 9.2 מציג את שני הגרפים באמצעותם מתארים את תגובת התדירות בתאור ברדה.

המרחק הקבוע לאורך ציר התדר בין כל שתי תדירויות שהיחס ביניהן הוא 10, נקרא בשם **דקדה** (decade).

בצורה דומה, כאשר היחס בין התדירויות הוא 2 , נקרא המרחק ביניהן בשם **אוקטבה** (Octave).



ציור 9.2

9.2.2 תאור ברדה אסימפטוטי של פגור מסדר ראשון

את עקרונות התאור ניתן להבין היטב מהדגמתו באמצעות פגור מסדר ראשון (הנקרא גם - מסנן מעביר נמוכים). פונקצית התמסורת של פיגור מסדר ראשון נתונה על ידי :

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \qquad (9.29)$$

כאשר τ הוא קבוע הזמן של הפיגור (או של המסנן).

$G(j\omega)$ המתאים יהיה:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\tau j\omega + 1}$$

לכן :

$$AR = \frac{1}{\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}} \; ; \; \phi = \tan^{-1}(\tau\omega)$$

ו-

$$(AR)_{db} = -10 \log_{10}(\tau^2\omega^2 + 1)$$

הטבלה הבאה מציגה את תגובת התדירות של (9.29) בערכים קיצוניים של $\tau\omega$. מהטבלה ניתן לראות כי ה-AR של פיגור מסדר ראשון קרוב לשתי אסימפטוטות :

האחת, $AR_{db} = 0 \, , \, (0 < \tau\omega < 1)$ (9.30)

והשניה, $AR_{db} = -20 \, (\log \tau\omega) \, , \, (1 < \tau\omega < \infty)$ (9.31)

$\tau\omega$	$(AR)_{db}$	ϕ
$\tau\omega << 1$	0	0°
$\tau\omega = 1$	-3	-45°
$\tau\omega >> 1$	$-20\log_{10}(\tau\omega)$	-90°

האסימפטוטה (9.31) אינה אלא ישר היוצא מהנקודה ($AR = 0 \, , \, \tau\omega = 1$) ושפועו -20db/decade. התדירות בה נחתכות שתי האסימפטוטות נקראת תדירות הפינה (ω_c).

תדירות הפינה נתונה על ידי :

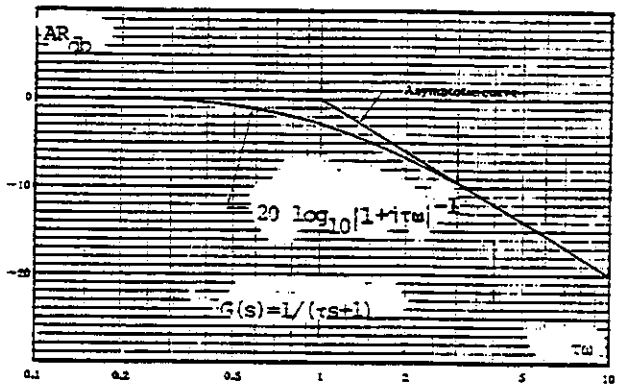
$$\omega_c = 1/\tau \qquad (9.32)$$

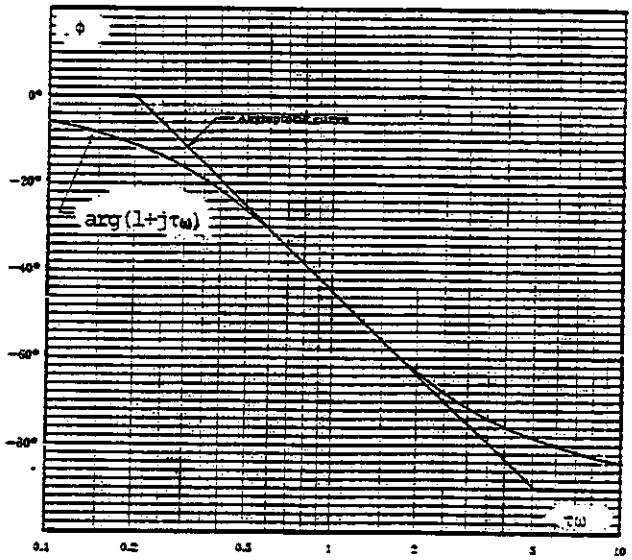
ה-AR של (9.29) ושתי האסימפטוטות מוצגים בציור 9.3 . הסטיה הגדולה ביותר בין התאור האסימפטוטי לבין התאור המדויק היא בתדירות הפינה וגודלה -3db.

<u>הערה</u> : גם את גרף הפאזה, ϕ, ניתן לקרב, כמוראה בציור 9.3 ומוסבר בטבלה.

$\tau\omega$	ϕ
$\tau\omega \le .2$	$\phi = 0$
$.2 \le \tau\omega \le 5$	הישר המתבר את ($\phi = 0, \; \tau\omega = .2$) עם $\phi = -90^o \, , \, \tau\omega = 5$
$\tau\omega \ge 5$	$\phi = -90$

כפי שניתן לראות מציור 9.3 קרוב זה אינו טוב (פרט לאזור הקרוב ל-$\tau\omega = 1$) ולכן משמש בדרך כלל להערכה גסה של גרף הפאזה.





<u>ציור 9.3</u>

9.2.3 <u>תאורי בודה של פונקציות אלמנטריות</u>

באופן דומה לפיתוח שבסעיף הקודם ניתן לקבל את תאורי בודה של פונקציות אלמנטריות אחרות (ראה ציורים 9.7 - 9.4):

א. <u>הגבר קבוע</u> . $G(s) = k$ (9.33)

ה-AR של (9.33) הינו קבוע ושווה ל-$AR = +20 \log k$.

ה-ϕ של (9.33) יהיה : $\phi = 0^o$ בכל התדירויות.

ב. <u>אינטגרטורים וגוזרים</u> (ציור 9.4) $G(s) = s^{\pm m}$ (9.34)

m - מספר שלם. הפונקציה $G(s) = 1/s$ נקראת **אינטגרטור**, והפונקציה $G(s) = s$ נקראת **גוזר**.

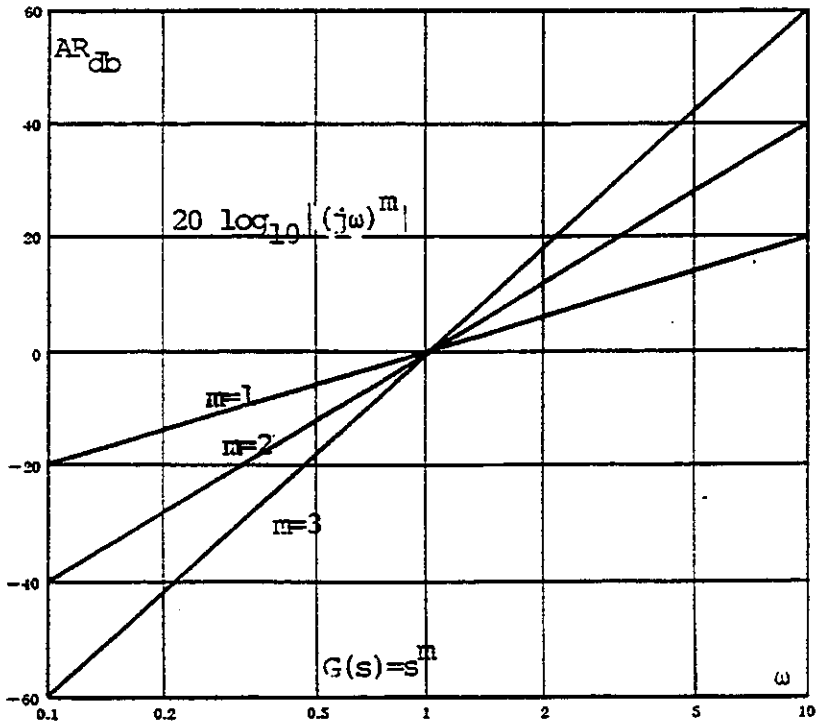
קל להראות שה-AR של (9.34) נתון על ידי :

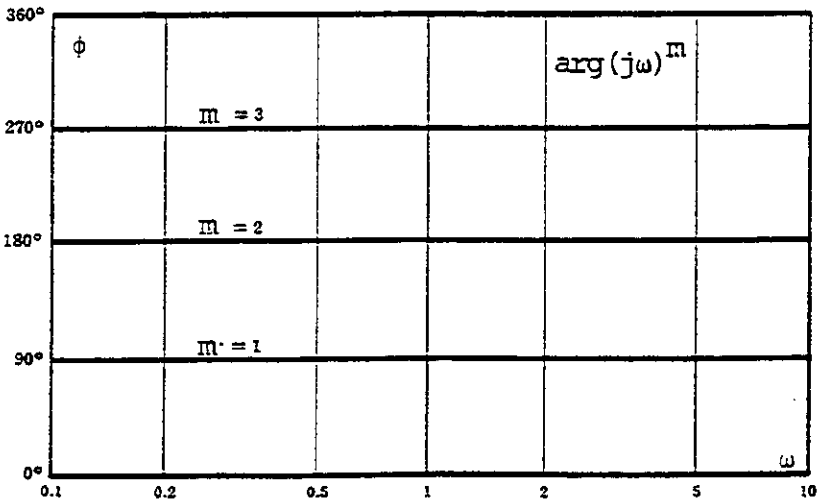
$$AR_{db} = \pm 20\, m \cdot \log\omega$$

כלומר ישר העובר דרך הנקודה ($AR = 0\ ,\ \omega = 1$) ושיפועו $\pm 20\ m$ דציבלים לדקדה. בצורה דומה, נתון פיגור (או קידום) הפאזה של (9.34) על ידי :

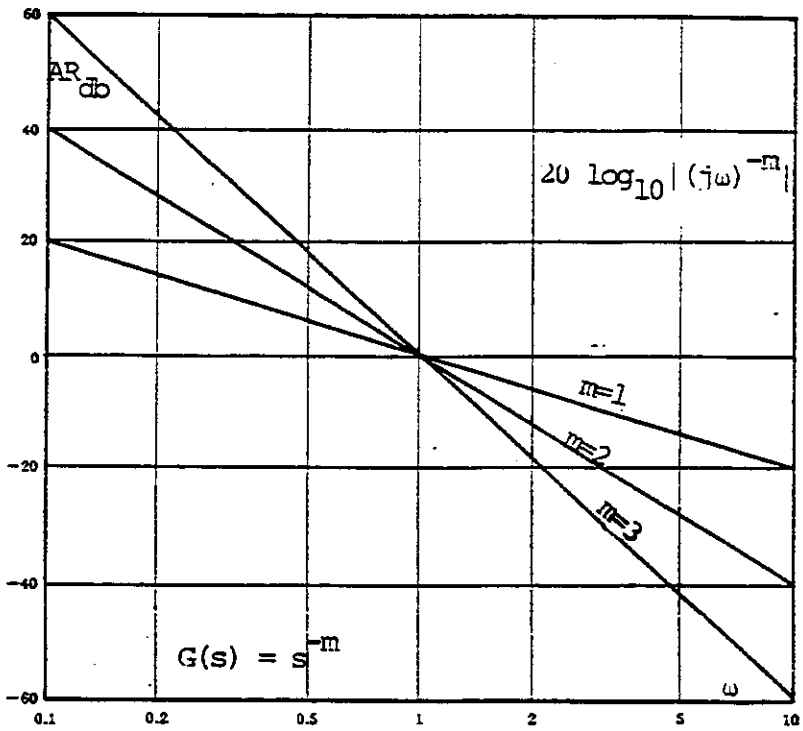
$$\phi = \pm 90^{o} \cdot m$$

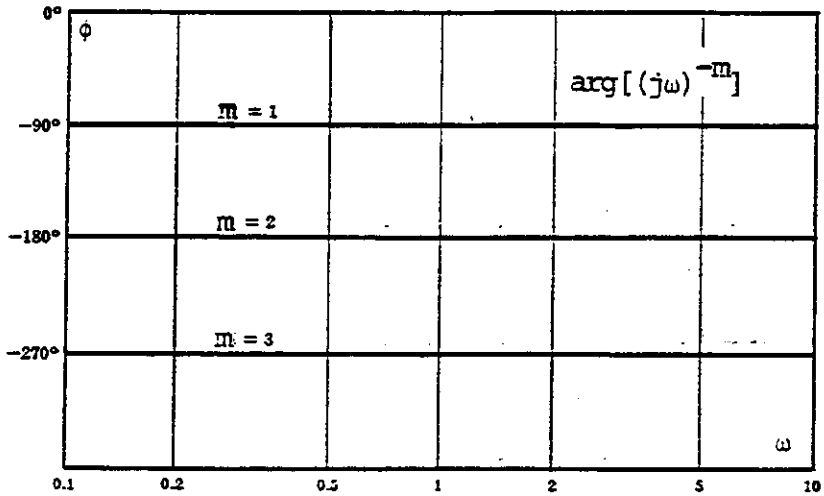
והוא קבוע בכל התדירויות.





<u>ציור 9.4 a</u> .



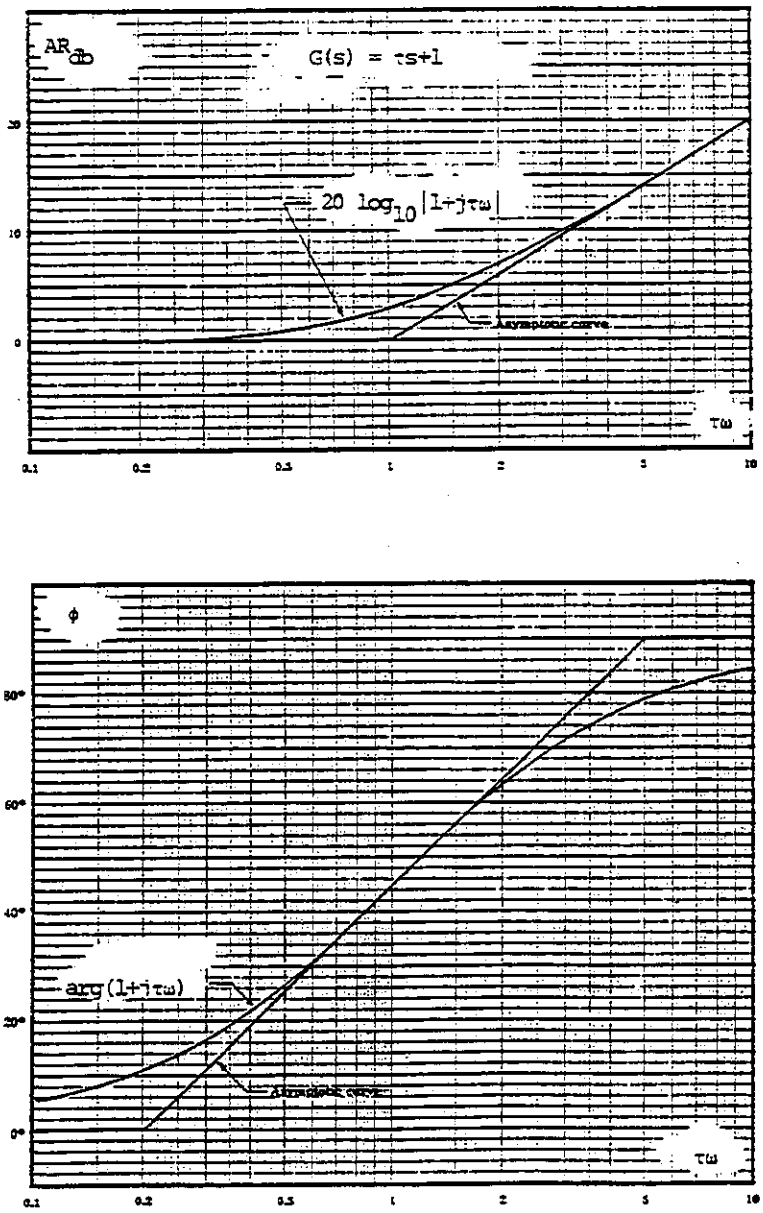


<u>ציור 9.4 b</u>

ג. <u>אפס ב-LHP</u> (ציור 9.5)

$$G(s) = \tau s + 1 \qquad (\tau > 0) \tag{9.35}$$

ה-AR וה-ϕ של (9.35) הינם תמונת ראי ביחס ל-0 = AR_{db} ו-$\phi = 0^{o}$ בהתאמה של פיגור מסדר ראשון.



ציור 9.5

ד. פונקציה מסדר שני (ציור 9.6) :

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n \xi s + \omega_n^2} \qquad (9.36)$$

ω_n - התדירות הטבעית.

ξ - מנת הרסון.

מערכות בהן $\xi < 1$ נקראות מערכות תת-מרוסנות. מערכות בהן $\xi > 1$ נקראות מערכות על-מרוסנות.

כאשר $\xi > 1$ ניתן לפרק את $G(s)$ שב-(9.36) למכפלה של שני פיגורים מסדר ראשון ולהשתמש בתכונת התבור של דיאגרמת בודה כפי שיוסבר בסעיף 9.2.4.

כאשר $\xi < 1$, נתון $G(j\omega)$ של (9.36) על ידי :

$$G(j\omega) = \frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2 + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}$$

ולכן :

$$AR_{db} = -20\log[(1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2 + (\frac{2\xi\omega}{\omega_n})^2]^{1/2} \tag{9.37}$$

ו-

$$\phi = -\tan^{-1}\frac{2\xi\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2} \tag{9.38}$$

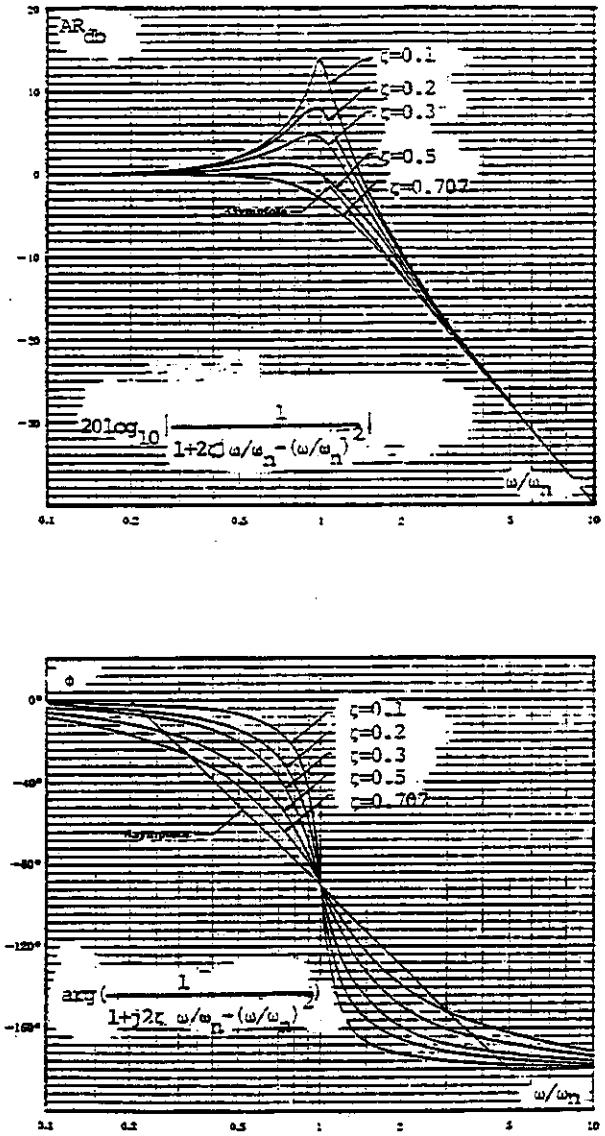
הטבלה להלן מציגה ערכים קיצוניים של תגובת התדירות של (9.36) . מהטבלה רואים שה-AR המדון קרוב לשתי אסימפטוטות: בתדירויות נמוכות, לאסימפטוטה $AR_{db} = 0$, ובתדירויות גבוהות ($\omega >> \omega_n$) לאסימפטוטה היוצאת מהנקודה ($AR = 0,\ \omega = \omega_n$), וירדת בשפע של -40db/decade. עבור $\xi < \sqrt{2}/2$ יש ל-AR מקסימום באזור התדירות הטבעית. ככל ש-ξ קטן יותר כן גדל מקסימום זה. ניתן להראות שגדל המקסימום הזה, AR_{max} , והתדירות בה הוא מתרחש ω_m נתנים על ידי :

ω/ω_n	AR_{db}	ϕ
<< 1	0	0°
>> 1	$-40\log\omega/\omega_n$	-180°

$$AR_{max} = (2\xi\sqrt{1-\xi^2})^{-1} \tag{9.39}$$

$$\omega_m = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \tag{9.40}$$

התדירות ω_m נקראת תדירות התהודה. כאשר $\xi \to 0$ הולך ה-AR_{max} וגדל ללא גבול.



ציור 9.6

ה. <u>זמן מת</u> (ציור 9.7)

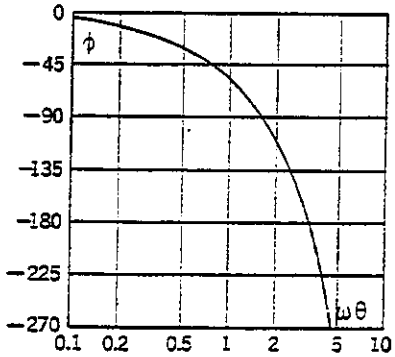
$$G(s) = e^{-\theta s} \qquad (9.41)$$

קל לראות ש-

$$AR_{db} = 0$$

$$\phi = -\theta\omega$$

זוית הפיגור בתגובת התדירות של זמן מת גדלה והולכת עם ω ללא גבול.



ציור 9.7

ו. <u>אפס ב-RHP</u>

$$G(s) = 1 - \tau s \qquad (\tau > 0)$$

$$G(j\omega) = 1 - \tau j\omega$$

לכן ה-AR וה-ϕ יהיו :

$$AR = (1 + \tau^2\omega^2)^{1/2} \quad ; \qquad \phi = \tan^{-1}(\frac{-\tau\omega}{1})$$

מכאן ברור שתאור בדה של ה-AR הוא בדיוק כמו של $1 + \tau s$ (ציור 9.5) אבל פיגור הפאזה של $1 - \tau s$ הוא בדיוק כמו של פגור מסדר I (9.29) - ראה ציור 9.3 .

9.2.4 <u>חשיבות ויתרון תאור בדה</u>

בתקופתנו, בה הפכו המיקרו מחשבים, בעלי הצגים הגרפיים, לכלי מקובל ונפוץ, ניתן לקבל את תגובת התדירות של כל מערכת על הצג הגרפי באמצעות תכנות מתאים. בשנים עברו, בהן צוירו תגובות התדירות, ידנית, היה לתאור בדה יתרון ניכר על פני תאורים אחרים. ראשית, רב התאורים של הפונקציות האלמנטריות, כפי שראינו בסעיפים הקודמים, מתוארים היטב באמצעות קוים ישרים (האסימפטוטות). שנית, מידיעת תאורי בדה של הפונקציות האלמנטריות ניתן, כפי שנראה להלן, לקבל בקלות יחסית את תאור בדה של תגובת התדירות של פונקציות מורכבות.

פונקציות התמסורת שאנו עוסקים בהן ניתנות לפרוק למכפלה של הפונקציות האלמנטריות שנמנו בסעיפים הקודמים, כלומר,

$$G(s) = \prod_{i=1}^{p} C_i(s) \tag{9.42}$$

כאשר $C_i(s)$ עשויה להיות פגור מסדר ראשון, הגבר, $s^{\pm m}$, פונקציה מסדר שני וכו'.

$G(j\omega)$ המתאים יהיה נתון על ידי :

$$G(j\omega) = \prod_{i=1}^{p} C_i(j\omega)$$

ולכן :

$$AR_{db} = 20 \log \prod_{i=1}^{p} |C_i(j\omega)| = \sum_{i=1}^{p} 20 \log |C_i(j\omega)| \tag{9.43}$$

ו-

$$\phi = \sum_{i=1}^{p} \arg(C_i(j\omega)) \tag{9.44}$$

משמעות (9.43) ו-(9.44) היא שעל מנת לקבל את תגובת התדירות של $G(s)$, יש לתאר את תגובות התדירות של המרכיבים, $C_i(s)$, כל אחד בנפרד, ולחברם גרפית.

דוגמא 2 : נתונה פונקציית התמסורת $G(s) = 2s / (1+0.5s)\ (1+s/8)^2$ שרטט דיאגרמת בודה אסימפטוטית עבור ה-AR וה-ϕ בתחום $0.1 < \omega < 100$. מהי סטיית הדיאגרמה האסימפטוטית מהערך האמיתי ב-$\omega = 8$? מהו פגור הפאזה המדויק ב-$\omega = 8$?

את $G(s)$ נפרק למרכיביה :

$$G(s) = 2 \cdot s \cdot \frac{1}{1 + 0.5s} \cdot \frac{1}{(1 + s/8)^2} = C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot C_4$$

בציור 9.8 צוירו הדיאגרמות של ה-AR וה-ϕ לכל אחד מהמרכיבים C_i. בגרף ה-AR מוצגות גם הדיאגרמות האסימפטוטיות וגם הדיאגרמות ה"מדויקות" (כפי שצוירו על ידי תכנה מתאימה). בגרף ה-ϕ צוירו אך ורק הדיאגרמות האסימפטוטיות. כשמחברים גרפית את דיאגרמות המרכיבים מתקבל תאור בודה של $G(s)$.

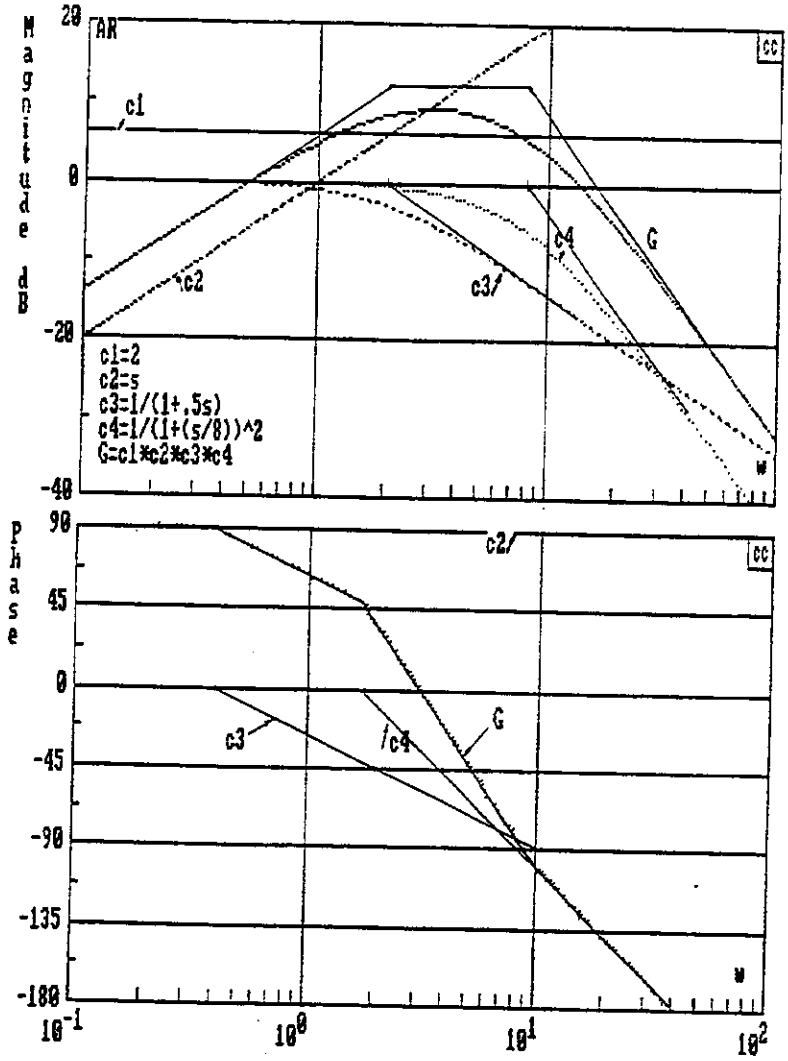
היות ו-$\omega = 8$ היא תדירות הפינה של $(1 + s/8)^{-2}$ וזו רחוקה מתדירות הפינה $\omega = 2$ (של $(1 + 0.5s)^{-1}$) תהיה הסטיה נתונה על ידי $2(-3db) = -6db$. התאור האסימפטוטי שבציור נותן ב-$\omega = 8$, $AR \cong 12db$ לכן ה-AR המדויק יותר יהיה: $AR = 12 - 6 = 6\ db$. לבדיקה נחשב אנליטית את ה-AR ב-$\omega = 8$.

$$AR(\omega = 8) = 20 \log \frac{2 \cdot \omega}{(1 + (0.5\omega)^2)^{1/2}(1 + \omega/8)^2)} \Big|_{\omega = 8} = 5.76\ db$$

באופן דומה נחשב אנליטית את פיגור הפאזה.

$$\phi(\omega = 8) = \arg \frac{j\omega}{(1 + 0.5j\omega)(1 + \frac{j\omega}{8})^2} \Big|_{\omega = 8} =$$

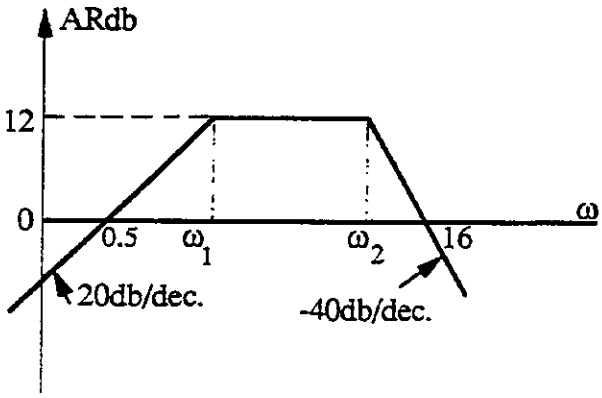
$$= 90^o - \tan^{-1}(0.5 \cdot 8) - 2\tan^{-1}(1) = -76^o$$



ציור 9.8

דוגמא 3 : בציור נתונה דיאגרמת ברדה אסימפטוטית של יחס האמפליטודות של מערכת מינימום פאזה. מצא את ω_1, ω_2 ואת פונקצית התמסורת של המערכת.

פתרון : את ω_1 ואת ω_2 נמצא מהקשרים :



$$12 / (\log \omega_1 - \log 1/2) = 20$$

$$12 / (\log \omega_2 - \log 16) = -40$$

ציור (דוגמא 3)

ונקבל: $\omega_1 = 2$ ו- $\omega_2 = 8$

מהגרף ברור ש-

$$G(s) = \frac{ks}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)^2}$$

לכן תדרי הפינה : $\tau_1 = 1/\omega_1 = 1/2$ ו- $\tau_2 = 1/\omega_2 = 1/8$

היות וב- $\omega = 0.5$ $|G(j\,0.5)| = 0\ db = 1$ (מהגרף) והיות וב- $\omega = 0.5$ נקבע הגרף **האסימפטוטי** על ידי k ו- s בלבד נקבל : $|G(j\,0.5)| = |k\,.\,j\,0.5| = 1$

מכאן : $k = 2$

ולכן :

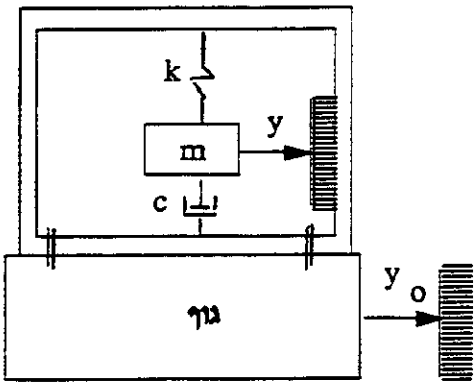
$$G(s) = \frac{2s}{(\frac{1}{2}\,s + 1)(\frac{1}{8}\,s + 1)^2}$$

<u>דוגמא 4</u> : רגשים מכניים (בחינת סמסטר תשמ"ז)

בציור מתואר רגש מכני. הרגש מחובר באופן קשיח לגוף. הרגש כולל "בית" סגור ובתוכו מסה m הקשורה לבית הרגש באמצעות קפיץ ומרסן כמוראה בציור.

המיקום הרגעי של המסה יחסית לבית הוא y. המיקום הרגעי של הגוף הוא y_o.

מטרת הרגש למדוד את תנודות הגוף על ידי הוצאת אות y הפרופורציונלי ל- y_o , או ל- $\ddot{y}_o$. במקרה הראשון משמש הרגש כמד-העתק ובמקרה השני כמד-תאוצה.



א) אם מגדירים את הכניסה לרגש כ- y_o ($u = y_o$) ואת יציאתו כ- y הראה כי פונקצית התמסורת של הרגש נתונה על ידי :

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{c}{m}\,s + \frac{k}{m}}$$

ב) אם $u(t) = \ddot{y}_o(t)$ מהי פונקצית התמסורת $y(s) / u(s)$?

ג) האם הרגש עשוי להיות מערכת לא יציבה ? - נמק.

ד) באלו תנאים יש לפונקציית התמסורת של הרגש קטבים ממשיים בלבד ?

בסעיפים הבאים קח $m = 1$, $k = 36$ ו-$c = 2.4$ (היחידות מותאמות).

ה) צייר איכותית תאור בדה (אסימפטוטי היכן שאפשר) של יחס האמפליטודות בלבד עבור שתי פונקציות התמסורת שבסעיפים א' ו-ב' וציין על ציורים אלו את האינפורמציה החשובה לדעתך.

ו) השתמש בתאורי בודה הנ"ל וענה : אם מטרת הרגש היא להורות סטיה y פרופורציונלית ל-y_o (הרגש מד העתק) מהו בקרוב תחום התדרים בו ניתן להשתמש ברגש ? - נמק .

ז) שאלה כנ"ל אלא שהרגש משמש כמד-תאוצה (y אמור להיות פרופורציונלי ישר ל-$\ddot{y}_o$).

ח) אם הרגש משמש כמד-תאוצה מהו פיגור הפאזה בתגובת התדירות כאשר $\omega = 0$ ו-$\omega = \infty$? כנ"ל כאשר הרגש משמש כמד-העתק.

ט) אם תנועת הגוף נתונה על ידי $y_o(t) = \delta(t) + 2\sin(20t)$ מה תהיה הורית מד-ההעתק במצב מתמיד ?

<u>פתרון</u> :

א) משואת התנועה :

$$m(\ddot{y} - \ddot{y}_o) + c\dot{y} + ky = 0$$

או :

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = m\ddot{y}_o$$

ולכן פונקצית התמסורת של מד-העתק:

$$G_1(s) = \frac{y(s)}{y_o(s)} = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}}$$

ב) אם $u(t) = \ddot{y}_o(t)$ אזי :

$$u(s) = s^2 y_o(s)$$

לכן פונקצית התמסורת של מד-תאוצה :

$$G_2(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^2}\frac{y(s)}{y_o(s)} = \frac{1}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}}$$

ג) מכנה פונקציות התמסורת הוא פולינום מסדר שני אשר כל מקדמיו חיוביים $(c > 0, m > 0, k > 0)$ לכן הרגשים יציבים.

ד) היות ו- $\omega_n = \sqrt{k/m}$ ו- $2\omega_n\xi = \frac{c}{m}$

נקבל :

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

אם $\xi \geq 1$ (מערכת על מרוסנת) נקבל קטבים ממשיים בלבד. התנאי לכך הוא :

$$\frac{c}{2\sqrt{km}} \geq 1$$

ה) הצבת הערכים המספריים נותנת :

$$G_1(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2.4s + 36} \quad ; \quad G_2(s) = \frac{1}{s^2 + 2.4s + 36}$$

ننרמל התדירות ל-ω_n , דהיינו נסמן $s' = s/\omega_n = s/6$ נקבל :

$$G_1(s') = \frac{s'^2}{s'^2 + 0.4s' + 1} \quad ; \quad G_2(s') = \frac{1/36}{s'^2 + 0.4s' + 1}$$

ונציב $s' = j\omega/\omega_n$.

גרפי בודה של AR עבור G_1 ו-G_2 אסימפטוטיים ו"מדויקים" נתונים בציורים (ראה עמוד הבא). את הגרף של G_1 מקבלים מחבור AR של מערכת מסדר שני ו-AR של s'^2 (גזר כפול) והגרף של G_2 הוא AR של מערכת מסדר שני.

ו-ז) תחומי התדרים בהם ניתן להשתמש ברגשים הם התחומים בהם ה-AR המתאים הינו קו-ישר אפקי (AR קבוע).

במד-ההעתק (G_1) התחום הוא בערך $\omega/\omega_n > 3$ או $\omega > 18$.

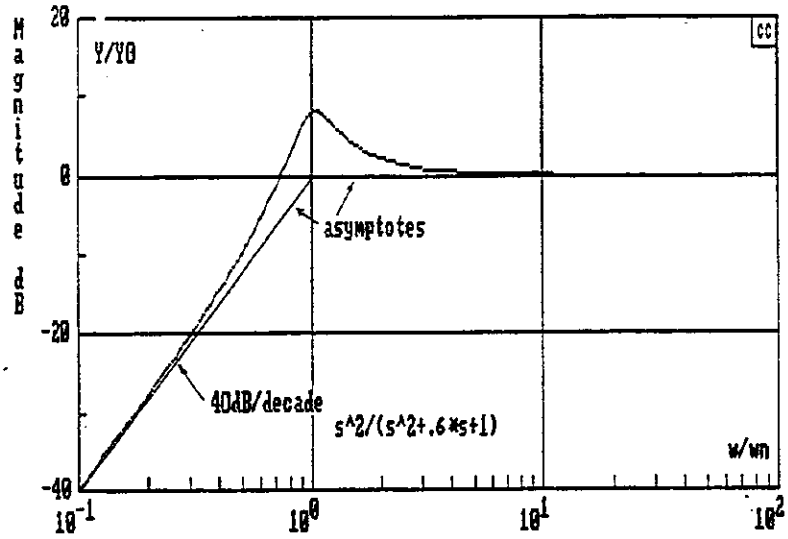
ובמד התאוצה (G_2) התחום הוא בערך $\omega/\omega_n < 0.3$ או $\omega < 1.8$.

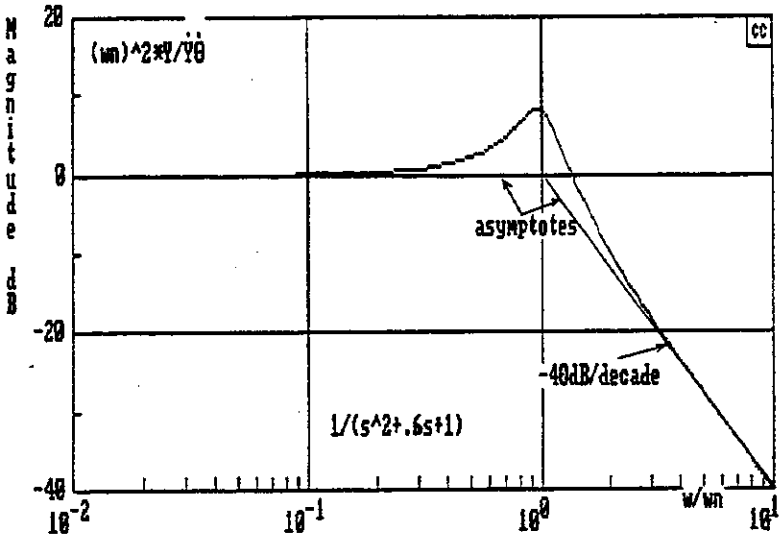
ח) $\arg G_2(\omega=0) = 0 \quad ; \quad \arg G_2(\omega=\infty) = -180^o$

זאת היות ו-$G_2(s)$ היא מערכת מסדר שני.

$$\arg G_1(\omega=0) = \arg s^2(s=jo) + \arg G_2(\omega=0) = +180^o$$

$$\arg G_1(\omega=\infty) = \arg s^2(s=j\infty) + \arg G_2(\omega=\infty) = 180^o - 180^o = 0^o$$





ט)
$$u(t) = y_o(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

כאשר : $u_1(t) = \delta(t)$ ו- $u_2(t) = 2\sin 20t$

את תגובת מד ההעתק לכניסה $u_1(t)$ במצב מתמיד נחשב ממשפט הערך הסופי :

$$y_1(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} s\, y_1(s)$$

והיות ו-

$$y_1(s) = G_1(s) \cdot u_1(s) = G_1(s)$$

נקבל :

$$y_1(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} s\, G_1(s) = 0$$

תוצאה זו כמובן אפשר היה לכתוב מיד מתוך הגדרת היציבות שכן מד-ההעתק יציב אסימפטוטית ולכן תגובתו להלם דועכת לאפס עם הזמן.

היות ו-$u_2(t)$ הינה כניסה מחזורית נחשב את $y_2(t)$ במצב מתמיד מתוך משפט תגובת התדירות :

$$(y_2)_{s.s.} = 2\,|G_1(j20)|\,\sin(20t + \arg G_1(j20))$$

$$G_1(j\omega) = \frac{-\omega^2}{36-\omega^2+2.4j\omega} =$$

$$= \frac{\omega^2}{((36-\omega^2)^2+(2.4\omega)^2))^{1/2}} \angle 180^\circ - \tan^{-1}\frac{2.4\omega}{36-\omega^2}$$

ועבור $\omega = 20$ נקבל :

$$G_1(j20) = 1.09 \angle 180-(180-7.5) = 1.09 \angle 7.5^\circ$$

ומכאן ש-

$$y_{s.s.}(t) = 0 + 2.18 \sin(20t + 7.5^\circ)$$

9.2.5 תאור פולרי

בתאור זה מתארים את $G(j\omega)$ כמספר קומפלקסי בהצגתו הפולרית, או הקרטזית, כפונקציה של ω $(0 \le \omega < \infty)$.

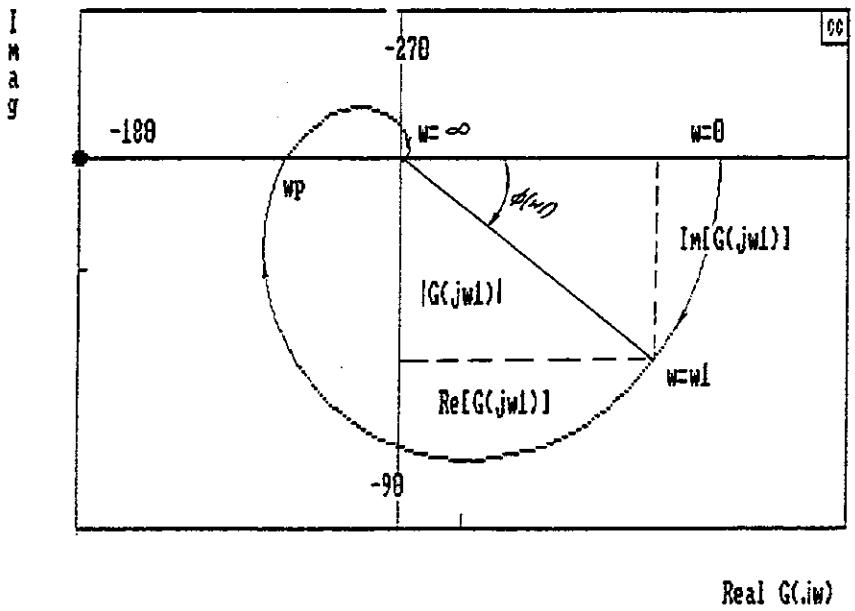
ההצגה הפולרית של $G(j\omega)$ נתונה על ידי :

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|\, e^{j \arg G(j\omega)} = |G(j\omega)| \angle \arg G(j\omega) \tag{9.45}$$

$G(j\omega)$ מתואר כוקטור בעל אורך : $AR = |G(j\omega)|$, וזוית $\phi(\omega) = \arg G(j\omega)$ (ראה ציור 9.9).

ההצגה הקרטזית של $G(j\omega)$ נתונה על ידי :

$$G(j\omega) = Re(G(j\omega)) + j\, Im(G(j\omega)) \tag{9.46}$$



ציור 9.9

בתאור הפולרי התדירות ω היא פרמטר. כדי לקבל את התאור הפולרי של תגובת התדירות, מחשבים את $G(j\omega)$ לפי (9.45) או (9.46) עבור מספר ערכים של ω, החל מ-0. נקודות אלו מסמנים בגרף ומחברים בקו רציף. נקודות בעלות ענין הן נקודת ההתחלה ($\omega = 0$), נקודת הסיום ($\omega = \infty$) ונקודת החותך עם הציר הממשי ($\omega = \omega_p$). נקודות אלו ניתן בדרך כלל לחשב בקלות יחסית.

9.2.6 <u>דוגמא 5</u>

נצייר סכמטית את התאור הפולרי של תגובת התדירות של הפונקציה :

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)^2}$$

נחשב תחילה את $G(j\omega)$ ב-$\omega = 0$ וב-$\omega = \infty$.

$$G(s)|_{s=0} \cong \frac{2}{s}|_{s=0} = \infty \angle -90^o$$

מהנ"ל ברור שהתאור מתחיל בזוית -90° , ובאמפליטודה (AR) אינסופית. כדי לקבוע האם התאור מתחיל על הציר המדומה או הינו מרוחק ממנו נחשב את $Re(G(j\omega))$ ב-$\omega = 0$.

$$G(j\omega) = \frac{2}{-2\omega^2 + j\omega(1-\omega^2)} = \frac{-4}{(\omega^2+1)^2} - j\,\frac{2(1-\omega^2)}{\omega(\omega^2+1)^2}$$

ומכאן :

$$\lim_{\omega \to 0} Re(G(j\omega)) = \lim_{\omega \to 0} \frac{-4}{(\omega^2+1)^2} = -4$$

ב-$\omega=\infty$ (או $s=\infty$) נקבל :

$$G(s)|_{s \to \infty} \cong \frac{2}{s^3} = 0 \angle -270^o$$

כדי למצוא את ω_p נכתוב את $\phi(\omega)$,

$$\phi(\omega) = \arg G(j\omega) = -90^o - 2\tan^{-1}\omega$$

ונשווה ל--180° . נקבל :

$$2\tan^{-1}\omega_p = 90^o$$

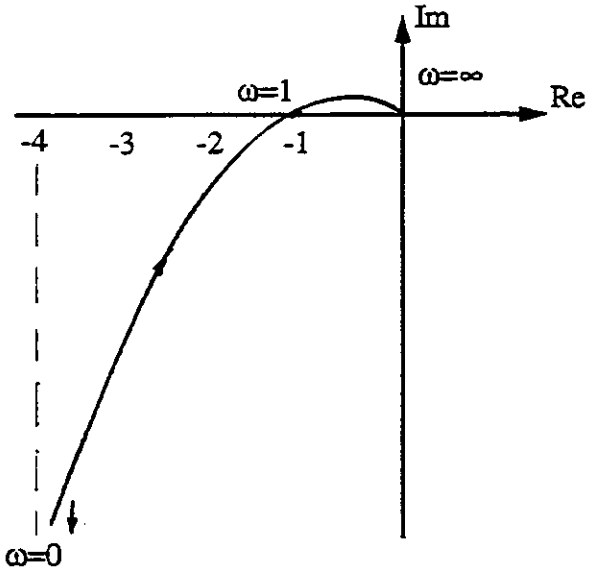
או :

$$\omega_p = \tan 45^o = 1$$

ה-AR ב-$\omega = \omega_p$ יהיה לכן :

$$|G(j\omega_p)| = 2/[\omega_p(\omega_p^2+1)] = 1$$

מנתונים אלו נוכל לצייר סכמטית את התאור הפולרי (ראה ציור 9.10). במידה ודרוש דיוק טוב יותר מחשבים את $G(j\omega)$ בערכים נוספים של ω.



ציור 9.10 .

9.2.7 <u>הערות:</u>

1) אם לפונקצית התמסורת q אינטגרטורים דהיינו :

$$G(s) = \frac{\sum_0^m b_i s^i}{s^q \sum_0^n a_i s^i} \qquad (a_o, b_o \neq 0)$$

אזי :

$$G(s)|_{s=0} = \frac{b_o}{a_o s^q}|_{s=0} = \infty \ \underline{|-90\,q}$$

כלומר התאור הפולרי של $G(j\omega)$ יחל באמפליטודה אינסופית ובזוית $-90\,q$.

2) אם למערכת n קטבים ו-m אפסים $(n > m)$, נקבל ב-$s \to \infty$:

$$G(s)|_{s\to\infty} = \frac{1}{s^{n-m}}|_{s\to\infty} = 0 \ \underline{|-(n-m)90^o}$$

כלומר התאור הפולרי של $G(j\omega)$ מסתיים בראשית (אמפליטודה 0) ו"יכנס" לראשית בזוית של $-(n-m)\,90^{o}$.

9.3 מערכות בדידות

תהיה מערכת SISO בדידה נתונה על ידי פונקציית התמסורת $G(z)$, (8.20) .

9.3.1 משפט תגובת התדירות : באם המערכת יציבה אסימפטוטית אזי הכניסה :

$$u(nT) = a\sin(n\omega T)$$

גוררת במצב מתמיד את היציאה :

$$y_{ss}(nT) = a|G(e^{j\omega T})|\sin(n\omega T+\phi(\omega T)) \tag{9.47}$$

כאשר :

$$\phi(\omega T) = \arg G(e^{j\omega T}) \tag{9.48}$$

הוכחה : ההוכחה אקוילנטית להוכחת משפט 9.1.1 במערכות רציפות. נניח כניסה הרמונית (בדידה),

$$u(nT) = ae^{j\omega nT} = a(\cos(n\omega T) + j\sin(n\omega T))$$

אזי,

$$U(z) = Zu(nT) = az/(z - e^{j\omega T})$$

היציאה המותמרת $Y(z)$ תהיה :

$$Y(z) = G(z)U(z) = G(z)\cdot az/(z-e^{j\omega T}) \tag{9.49}$$

את (9.49) נפרק לשברים חלקיים :

$$y(nT) = Z^{-1}\left[\frac{\alpha z}{z-e^{j\omega T}} + \Sigma\frac{\beta_i z}{z-p_i}\right]$$

כאשר p_i הם קטבי $G(z)$ ולפי הנתון $|p_i| < 1 \quad (i = 1,\dots,n)$. מכאן ש-

$$y_{ss}(nT) = Z^{-1}\left[\frac{\alpha z}{z-e^{j\omega T}}\right] = \alpha e^{j\omega nT} \tag{9.50}$$

כאשר :

$$\alpha = Y(z)\cdot\frac{z-e^{j\omega T}}{z}\Big|_{z=e^{j\omega T}} = aG(e^{j\omega T}) = a|G(e^{j\omega T})|\cdot e^{j\phi(\omega T)} \tag{9.51}$$

ו-$\phi(\omega T)$ נתון על ידי :

$$\phi(\omega T) = \arg G(e^{j\omega T}) = \tan^{-1} \frac{\mathrm{Im}\ G(e^{j\omega T})}{\mathrm{Re}\ G(e^{j\omega T})}$$

הצבת (9.51) ב-(9.50) תתן את (9.47).

9.3.2 <u>מסקנות</u>

1. כדי לקבל את תגובת התדירות של מערכת בדידה נציב בפונקצית התמסורת $G(z)$, במקום z, $e^{j\omega T}$.

יחס האמפליטודות AR יהיה אז,

$$AR = |G(e^{j\omega T})| \tag{9.52}$$

והזזת הפאזה,

$$\phi = \arg G(e^{j\omega T}) \tag{9.53}$$

2. היות והמספר הקומפלקסי $G(e^{j\omega T})$ הינו מחזורי בתדירות

$$\omega_s = 2\pi/T \tag{9.54}$$

כאשר ω_s היא תדירות הדגימה, מספיק לתאר את תגובת התדירות בתחום:

$$0 \le \omega \le \omega_s \tag{9.55}$$

<u>דוגמא 6</u>: נמצא את תגובת התדירות של $G(z) = z/(z-0.9)$. לשם כך נציב $z = e^{j\omega T}$ ונקבל:

$$G(e^{j\omega T}) = \frac{e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - 0.9} = \frac{e^{j\omega T}}{\cos\ \omega T - 0.9 + j \sin\ \omega T}$$

ה-AR יהיה,

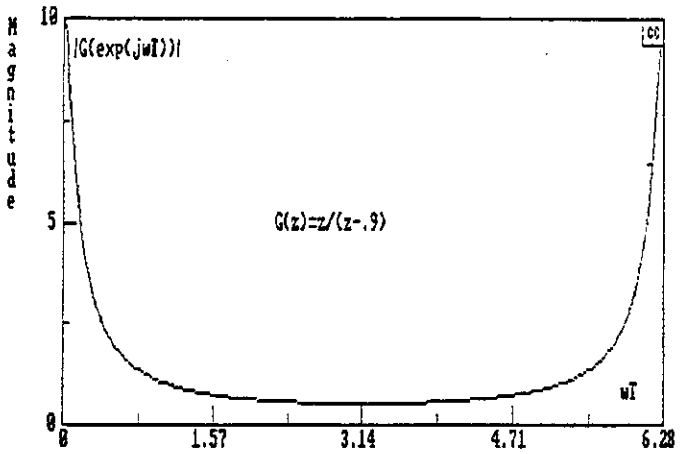
$$AR(\omega T) = |G(e^{j\omega T})| = \frac{1}{((\cos\ \omega T - 0.9)^2 + \sin^2 \omega T)^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{(1.81 - 1.8 \cos\ \omega T)^{1/2}}$$

והסחת הפאזה תהיה:

$$\phi(\omega T) = \arg G(e^{j\omega T}) = \omega T - \tan^{-1}\left[\frac{\sin\ \omega T}{\cos\ \omega T - 0.9}\right]$$

ה-AR בתחום $0 \le \omega T \le 2\pi$ נתון בציור 9.11.



ציור 9.11

9.3.3 שימוש בתאור בדה למערכות בדידות.

עקב האקספוננט $e^{j\omega T}$ לא ניתן להשתמש ישירות בתאור האסימפטוטי של בדה לתאור תגובת התדירות של מערכות בדידות. על קושי זה ניתן להתגבר באמצעות ההתמרה הביליניארית. נשתמש בהתמרה הביליניארית הבאה : (ראה 8.2.3):

$$z = \frac{1+w}{1-w} \qquad (w = \frac{z-1}{z+1}) \tag{9.56}$$

ההתמרה (9.56) , כזכור, מעתיקה את פנים מעגל היחידה במשור z ל-LHP במשור w, ואת מעגל היחידה, $z = e^{j\omega T}$, במשור z לציר המדומה jv במשור w. אי לכך, במקום לתאר את תגובת התדירות של המערכת הבדידה כפונקציה של התדירות ω נתאר את תגובת התדירות כפונקציה של התדירות ה"פיקטיבית", v. את הקשר בין ω ל-v נמצא מהשויון :

$$e^{j\omega T} = \frac{1+jv}{1-jv} \tag{9.57}$$

משויון הארגומנטים של שני המספרים הקומפלקסיים שב-(9.57) נקבל :

$$\omega T = \tan^{-1}v - (-\tan^{-1}v) = 2\tan^{-1}v$$

ומכאן

$$\omega T = 2\tan^{-1}v \tag{9.58}$$

או :

$$v = \tan\frac{\omega T}{2} \tag{9.59}$$

כאשר $\omega = 0$ יהיה $v = 0$,

וכאשר $\omega T = \pi$ יהיה $v \to \infty$.

לסיכום, על מנת לתאר את תגובת התדירות של מערכת בדידה,תוך ניצול תאור ברדה, נתמיר את G(z) באמצעות (9.56) ונקבל G(w). ב-G(w) נציב w =jv ונחשב :

$$AR = | G(w = jv) |$$

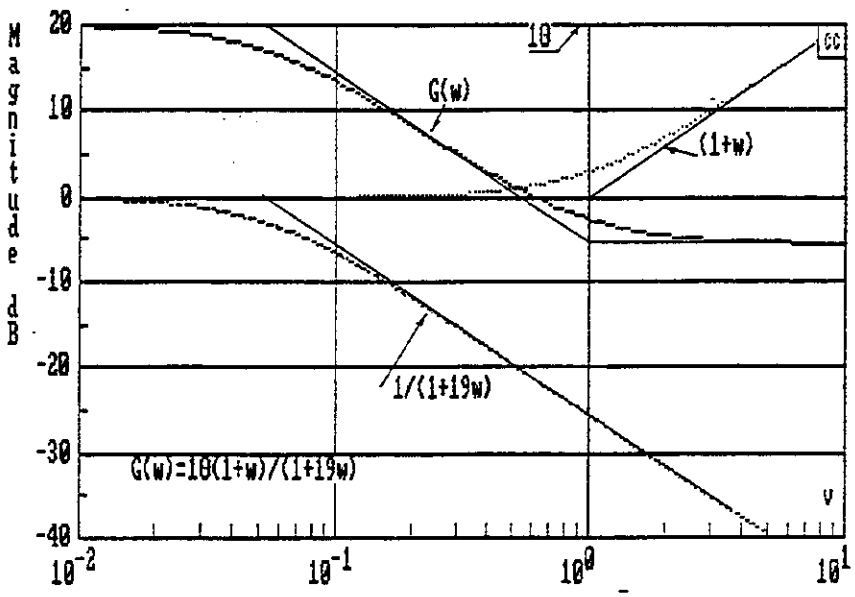
$$\phi = \arg [G(\omega = jv)]$$

כאשר הקשר בין התדירות האמיתית והתדירות המדומה v נתון ב-(9.58).

<u>דוגמא 7</u> : נפתור את דוגמא 6 באמצעות תאור ברדה אסימפטוטי. לצורך זה נציב ב-G(z) את (9.56).

$$G(w) = (\frac{1+w}{1-w}) / (\frac{1+w}{1-w} - 0.9) = \frac{10(1+w)}{1+19w}$$

על G(w) ניתן עתה להפעיל את התאור האסימפטוטי של ברדה. בציור 9.12 מוצג תאור ברדה של ה-AR בלבד. בציור מוצגים גם התאורים האסימפטוטיים וגם התאורים המדוייקים של כל מרכיב של G(w) ושל G(w).



<u>ציור 9.12</u>

אם נרצה לדעת, למשל, מה ה-AR ב-$\omega T=\pi/2$, נמצא ה-v המתאים מ-(9.59).

$$v = \tan \pi/4 = 1$$

ומהגרף שבציור 9.12 נמצא את ה-AR(v=1) . מהתאור האסימפטוטי מקבלים $| G(w=jv) |_{v=1} \cong$ -6 db ומהתאור המדוייק יותר מקבלים -3db בערך. ההפרש נובע כמובן מהעובדה ש-v=1 היא תדירות הפינה של 1+w ושם התאור המדויק הוא בערך -3db .

נחשב עתה אנליטית את AR(v=1) בשתי דרכים :

$$AR(v=1) = |G(w=jv)|_{v=1} = \left|\frac{10(j+1)}{1+j19}\right| = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{1+19^2}} = 0.74 = -2.58db$$

או ישירות כדלקמן :

$$AR(\omega T=\pi/2) = |G(e^{j\omega T})|_{\omega T=\pi/2} = \frac{1}{(1.81-1.8\cos\omega T)^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{1.81^{1/2}} = 0.74$$

9.3.4 <u>מערכות מינימום פאזה (מערכות ברות-הפיכה)</u>

בדומה למערכות רציפות תקרא מערכת בדידה (בעלת פונקצית תמסורת רציונלית) מינימום פאזה (או ברת-הפיכה) אם כל קטביה ב-OUD וכל אפסיה ב-CUD . מערכת בדידה לה אפס אחד או יותר מחוץ ל-UD תקרא לא-מינימום פאזה.

אם G(z) נתונה על ידי :

$$G(z) = k\frac{\prod_1^m (z-z_i)}{\prod_1^n (z-p_i)} \tag{9.60}$$

וכל אפסיה, z_i ב-CUD , פרט ל-$z=z_q$ הנמצא מחוץ ל-UD ניתן לכתוב את G(z) בצורה :

$$G(z) = G_1(z)\frac{\frac{1}{z}-z_q}{z-z_q} \tag{9.61}$$

$G_1(z)$ היא מינימום פאזה המקיימת :

$$|G_1(e^{j\omega T})| = |G(e^{j\omega T})| \quad \forall \quad \omega \geq 0 \tag{9.62}$$

שכן קל להראות כי (הוכח זאת)

$$\left|\frac{\frac{1}{z}-z_q}{z-z_q}\right|_{z=e^{j\omega T}} = 1 \qquad \forall \quad \omega \geq 0 \tag{9.63}$$

<u>דוגמא 8</u> :

נתונה : $G(z) = \frac{z-2}{z-1/2}$. מצא $\bar{G}(z)$ מינימום פאזה המקימת :

$$|\bar{G}(e^{j\omega T})| = |G(e^{j\omega T})| \quad \forall \quad \omega \geq 0 \tag{9.64}$$

<u>פתרון</u> : לפי (9.61) נקבל :

$$\bar{G}(z) = G(z) \cdot \frac{\frac{1}{z} - 2}{z - 2} = \frac{\frac{1}{z} - 2}{z - 1/2} = -\frac{2}{z}$$

נוכיח כי $\bar{G}(z)$ תנ"ל מקימות את (9.64) :

$$|G(e^{j\omega T})| = \left| \frac{e^{j\omega T} - 2}{e^{j\omega T} - 1/2} \right| = \left| \frac{\cos\ \omega T - 2 + j \sin\ \omega T}{\cos\ \omega T - 1/2 + j \sin\ \omega T} \right| = 2 \frac{\sqrt{5 - 4\cos\ \omega T}}{\sqrt{5 - 4\cos\ \omega T}} = 2$$

$$|\bar{G}(e^{j\omega T})| = \left| -\frac{2}{e^{j\omega T}} \right| = 2$$

פרק 10 : אנליזה מודלית - מושגים בתורת הרטט

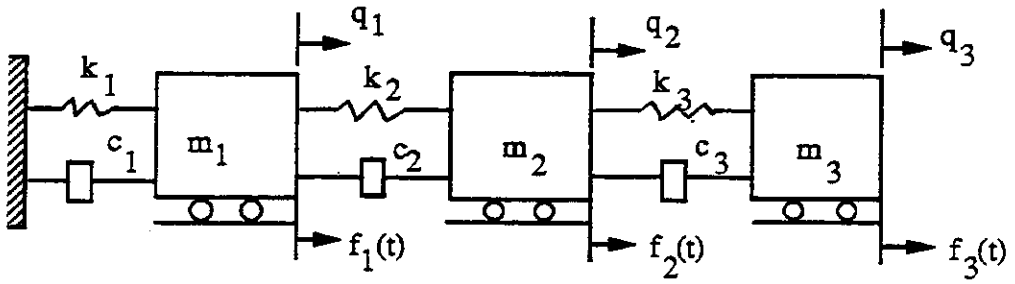
10.1 מבוא

במרחב המצב מושתת הטיפול במערכות רציפות על הצגתן באמצעות משואות דפרנציאליות מסדר ראשון (הנקראות משואות המצב). במערכות מכניות מתקבלות באופן טבעי משואות תנועה מסדר שני. הטיפול במערכות אלו ישירות עם משואות מסדר שני מקובל בתורת הרטט.

מטרת פרק זה לשמש מבוא לכלים ולמושגים המקובלים בתורת הרטט .

10.2 דוגמת מבוא - מערכת מכנית עם שלוש דרגות חופש

בציור 10.1 מתוארת מערכת מכנית קוית עם 3 דרגות חופש (דרגת חופש היא קואורדינטה בלתי תלויה הדרושה לתאור המערכת).



ציור 10.1

$q_i(t)$ $(i = 1,2,3)$ - הן **הקואורדינטות המוכללות** ובמקרה זה מתארות את המיקום הרגעי של המסות m_i . $f_i(t)$ $(i = 1,2,3)$ - הם הכוחות החיצוניים המופעלים על המסות m_i .

משואות התנועה נתונות על ידי שלוש משואות מסדר שני ב-q_i .

$$m_1\ddot{q}_1 + (c_1 + c_2)\dot{q}_1 - c_2\dot{q}_2 + (k_1 + k_2)q_1 - k_2q_2 = f_1(t)$$

$$m_2\ddot{q}_2 - c_2\dot{q}_1 + (c_2 + c_3)\dot{q}_2 - c_3\dot{q}_3 - k_2q_1 + (k_2 + k_3)q_2 - k_3q_3 = f_2(t)$$

$$m_3\ddot{q}_3 - c_3\dot{q}_2 + c_3\dot{q}_3 - k_3q_2 + k_3q_3 = f_3(t) \qquad (10.1)$$

את (10.1) ניתן לכתוב על ידי משואה מטריציונית בצורה:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = F \qquad (10.2)$$

כאשר:

$$q \triangleq \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad F \triangleq \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & m_2 & \\ 0 & & m_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \tag{10.3}$$

q - וקטור הקואורדינטות המוכללות

F - וקטור הכוחות המוכללים

M - מטריצת המסה

C - מטריצת הריסון

K - מטריצת הקשיחות

10.3 תכונות M ו-K

עבור מערכת עם n דרגות חופש יהיה q ממימד n ומימדי המטריצות C , M ו-K יהיו n × n.

מהדוגמא ב-10.2 ניתן לראות כי:

$$M = M^T \quad C = C^T \quad K = K^T \tag{10.4}$$

דהיינו C , M ו-K מטריצות סימטריות. יתרה מכך, המטריצה M התקבלה כמטריצה אלכסונית. השאלה הנשאלת היא מה ניתן לאמר באופן כללי על תכונות C , M ו-K .

היות ונתרכז בהמשך במערכות לא מרוסנות בהן $C = 0$ נסקור את תכונות מטריצת המסה ומטריצת הקשיחות.

10.3.1 מטריצת המסה M עשויה להתקבל כמטריצה לא אלכסונית בבחירה אחרת של וקטור הקואורדינטות המוכללות אך תמיד ניתן לבחור וקטור q כך ש-M תהיה :

א. סמטרית וממשית

ב. חיובית לחלוטין (positive definite - p.d.)

10.3.2 <u>מטריצת הקשיחות</u> K תהיה :

א. סמטרית וממשית

ב. חיובית לחלוטין באופן חלקי (positive semi-definite - p.s.d.)

10.3.3 <u>הערות</u> :

1) את תכונות ב' ב-10.3.1 וב-10.3.2 ניתן להראות משיקולי אנרגיה.

2) משמעות תכונה ב' ב-10.3.1 היא ש-M^{-1} קימת תמיד.

10.4 <u>ע"ע-ים וו"ע-ים במערכת חפשית לא מרוסנת</u>

10.4.1 נתרכז במערכות **לא מרוסנות**. במקרים אלו משואת התנועה (10.2) תהיה:

$$M\ddot{q} + Kq = F \tag{10.5}$$

ובאם מדובר **במערכת החופשית** תרד (10.5) ל:

$$M\ddot{q} + Kq = 0 \tag{10.6}$$

בהנחת תנאי התחלה 0 נקבל מהתמרת לפלס של (10.6)

$$(Ms^2 + K)q(s) = 0 \tag{10.7}$$

10.4.2 <u>המשואה האפינית</u> של (10.7) תהיה לכן:

$$\Delta(s^2) = |Ms^2 + K| = 0 \tag{10.8}$$

אם כופלים את (10.8) משמאל ב- $|M^{-1}|$ נקבל:

$$|M^{-1}|\,|Ms^2+K| = |Is^2+M^{-1}K| = 0 \tag{10.9}$$

ומכאן שאת המשואה האפינית של (10.6) ניתן לכתוב גם בצורה:

$$|Is^2 + \Omega| = 0 \tag{10.10}$$

כאשר:

$$\Omega \triangleq M^{-1}K \tag{10.11}$$

10.4.3 <u>**משפט**</u> (אלגברה ליניארית): אם ל-$M_{n\times n}$ ו-$K_{n\times n}$ התכונות 10.3.1 ו-10.3.2 אזי הפתרונות

$((s^2)_i\ ,\quad i = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ n))$ של (10.8) ו-(10.10) כולם ממשיים **ולא** חיוביים.

אם מציבים לכן ב-(10.8) וב-(10.10) $s^2 = (j\omega)^2 = -\omega^2$ נקבל את המשואות האפיניות:

$$|M\omega^2 - K| = 0 \qquad (10.12)$$

$$|I\omega^2 - \Omega| = 0 \qquad (10.13)$$

בהתאמה. ולפי המשפט הפתרונות של (10.12) ו-(10.13) מקיימים:

$$\omega_i^2 \geq 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (10.14)$$

10.4.4 **הערה**: לעיתים קרובות נוהגים לסמן $\omega^2 = \lambda$ ואז משואות (10.12) ו-(10.13) תכתבנה בצורה:

$$|M\lambda - K| = 0 \qquad (10.12)'$$

$$|I\lambda - \Omega| = 0 \qquad (10.13)'$$

10.4.5 הפתרונות λ_i של ' (10.12) ו-' (10.13) (או לחילופין הפתרונות ω_i^2 של (10.12) ושל (10.13)) נקראים **הערכים העצמיים** (ע"ע-ים) של המערכת (10.6) .

10.4.6 הוקטורים v^i $(i = 1,\ldots,n)$ $(\|v^i\| \neq 0)$ המקיימים את :

$$(\lambda_i I - \Omega)\, v^i = 0 \qquad (i = 1,\ldots,n) \qquad (10.15)$$

נקראים **הוקטורים העצמיים** (ו"ע-ים) או **הוקטורים המודליים** והמטריצה V אשר עמודותיה הם v^i נקראת **המטריצה המודלית**.

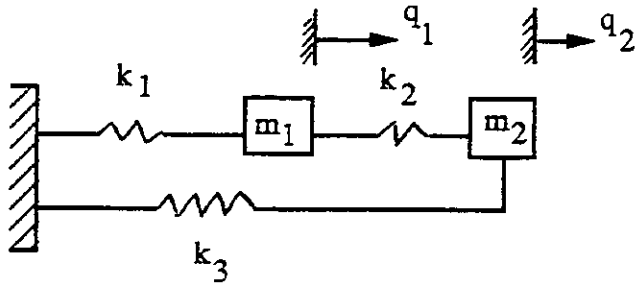
הערה: יש לזכור שהפתרונות v^i של (10.15) נקבעים רק בכוונם ולא בגודלם המוחלט. אם v^i הינו ו"ע אזי גם αv^i הינו ו"ע כאשר α קבוע ו-$\alpha \neq 0$.

10.4.7 השרשים החיוביים ω_i של הע"ע-ים (λ_i או ω_i^2) נקראים בשם **התדירויות הטבעיות** של המערכת (10.6) ומ-(10.14) ברור כי כל התדירויות הטבעיות ממשיות ולא שליליות.

10.4.8 **דוגמא**: מערכת תפשית לא מרוסנת בעלת שתי דרגות חופש נתונה בציור 10.2 .

נתון כי : $k_1 = k_2 = k_3 = k$

וכי : $m_1 = m \;;\; m_2 = 2m$



ציור 10.2

משוואות התנועה של המערכת נתונות על ידי:

$$M\ddot{q} + Kq = 0$$

כאשר :

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix} \quad ; \quad K = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}$$

המשואה האופינית לפי (10.12) - י (10.13) מביאה ל-

$$\Delta(\omega^2) = \omega^4 - 3\,\frac{k}{m}\,\omega^2 + \frac{3}{2}\,\frac{k^2}{m^2} = 0$$

מכאן שהע״ע-ים של המערכת נתונים על ידי :

$$\lambda_{1,2} = (\omega^2)_{1,2} = \frac{3}{2}\,(1 \pm 1/\sqrt{3})\frac{k}{m}$$

והתדירויות הטבעיות תהיינה לכן ,

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = 0.7962\sqrt{k/m} \quad ; \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1.5382\sqrt{k/m}$$

את הו״ע-ים נמצא מתוך (10.15) על ידי מטריצת ה-Adjoint של $(\lambda I-\Omega)$ כפי שעשינו בפרק 2.

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - \Omega) = \mathrm{Adj}(\lambda I - M^{-1}K) =$$

$$= \mathrm{Adj}\left(\lambda I - \begin{bmatrix} \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ \frac{-k}{2m} & \frac{k}{m} \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda - \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{2m} & \lambda - \frac{2k}{m} \end{pmatrix}$$

הצבת λ_1 ו-λ_2 בנ״ל מביאה ל-

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.366 \end{pmatrix} \quad ; \quad v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.366 \end{pmatrix}$$

והמטריצה המודלית :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.366 & -0.366 \end{pmatrix}$$

10.5 טרנספורמציה לקואורדינטות טבעיות.

10.5.1 n המשוואות מסדר שני המתוארות ב-(10.5) או ב-(10.6) הינן משואות מצומדות. על מנת להקל על הפתרון של מערכות אלו מבצעים טרנספורמציה מהקואורדינטות המוכללות, q , **לקואורדינטות טבעיות** (או קואורדינטות ראשיות) , η , בהן המשואות אינן מצומדות.

10.5.2 <u>משפט</u> (אלגברה ליניארית):

1) עבור $M_{n\times n}$ ו-$K_{n\times n}$ בעלות תכונות 10.3.1 ו-10.3.2 בהתאמה קימת מטריצה לא סינגולרית $\bar{V}_{n\times n}$ כך ש:

$$\bar{V}^T K \bar{V} = W^2 \qquad (10.16)$$

$$\bar{V}^T M \bar{V} = I \qquad (10.17)$$

כאשר:

$$W^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & & O \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \omega_n^2 \end{pmatrix}$$

ו-ω_i הן התדירויות הטבעיות של המערכת.

2) העמודות $\bar{v}^i$ של $\bar{V}$ הינם הוייע v^i של Ω (ראה (10.15)) מנורמלות כך ש-(10.17) תקוים. במילים אחרות: $\bar{V}$ הינה מטריצה מודלית המנורמלת לפי (10.17).

10.5.3 מהמשפט נובע כי ניתן ללכסן בו זמנית את המטריצות M ו-K כך ש-M תעבור למטריצת היחידה על ידי **המטריצה המודלית המנורמלת** $\bar{V}$. הקשר בין v^i (עמודות V) ו- $\bar{v}^i$ נתון על ידי:

$$\bar{v}^i = \alpha_i v^i \qquad i = 1, \dots n \qquad (10.19)$$

כאשר α_i קבועים הנקבעים מ-(10.17) . דהיינו:

$$(\bar{v}^i)^T M(\bar{v}^i) = 1 \qquad i = 1, \dots n \qquad (10.20)$$

או:

$$(\alpha_i v^i)^T M(\alpha_i v^i) = 1 \qquad i = 1, \dots n \qquad (10.21)$$

10.5.4 <u>דוגמא</u> (המשך דוגמא 10.4.8).

בדוגמא 10.4.8 מצאנו את המטריצה המודלית V של המערכת. נמצא כעת את המטריצה המודלית המנורמלת $\bar{V}$.

נשתמש ב-(10.21) למציאת α_i $(i = 1,2)$.

$$(\alpha_1 v^1)^T M(\alpha_1 v^1) = (\alpha_1 \quad 1.366\alpha_1)\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 1.366\alpha_1 \end{pmatrix} = 4.7320 m\alpha_1^2 = 1$$

ומכאן:

$$\alpha_1 = 0.4597 m^{-1/2}$$

בצורה דומה נקבל:

$$\alpha_2 = 0.8881 m^{-1/2}$$

ולכן:

$$\bar{V} = m^{-1/2}\begin{pmatrix} 0.4597 & 0.8881 \\ 0.6280 & -0.3251 \end{pmatrix}$$

10.5.5 נפעיל כעת את הטרנספורמציה :

$$q = \bar{V}\eta \tag{10.22}$$

על משואה (10.6) ונקבל:

$$\bar{V}^T M\bar{V}\ddot{\eta} + \bar{V}^T K\bar{V}\eta = 0 \tag{10.23}$$

או:

$$I\ddot{\eta} + W^2\eta = 0 \tag{10.24}$$

במשואה (10.24) משואות התנועה **אינן** מצומדות. המשואה ה-i ב-(10.24) תהיה:

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2\eta_i = 0 \tag{10.25}$$

הקואורדינטות $\eta_i(t)$ $(i = 1, \dots n)$ נקראות **קואורדינטות טבעיות** או **קואורדינטות ראשיות**.

10.6 <u>**תגובת המערכת לתנאי התחלה.**</u>

10.6.1 תהליך פתרון משואות התנועה של מערכות רוטטות על ידי הצגתן בקואורדינטות הטבעיות באמצעות המטריצה המודלית המנורמלת $\bar{V}$ נקרא **אנליזה מודלית**.

10.6.2 פתרון (10.24) נתון על ידי:

$$\eta_i(t) = a_i \cos(\omega_i t - \phi_i) \qquad i = 1,2,\dots n \tag{10.26}$$

כאשר :

ω_i - הינה התדירות הטבעית ה-i-ית.

a_i - אמפליטודת הקואורדינטה הטבעית ה-i-ית.

ϕ_i - זוית הפאזה של הקואורדינטה הטבעית ה-i-ית.

a_i ו-ϕ_i תלויים בתנאי ההתחלה.

10.6.3 על ידי שמוש ב-(10.22) נקבל את הפתרון בקואורדינטות המוכללות

$$q(t) = \bar{V}\eta(t) = (\bar{v}^1, \bar{v}^2, \dots, \bar{v}^n)\eta(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{v}^i \cos(\omega_i t - \phi_i) \tag{10.26}$$

$\bar{v}^i \cos(\omega_i t - \phi_i)$ נקרא **מוד (אופן-תנועה)**. מ-(10.26) רואים כי ריטוט של מערכת חפשית רבת דרגות חופש הינו סכום משוקלל של תנועות הרמוניות בתדירות ω_i לאורך הוקטורים המודליים $\bar{v}^i$.

10.6.4 תאור גרפי של מודים

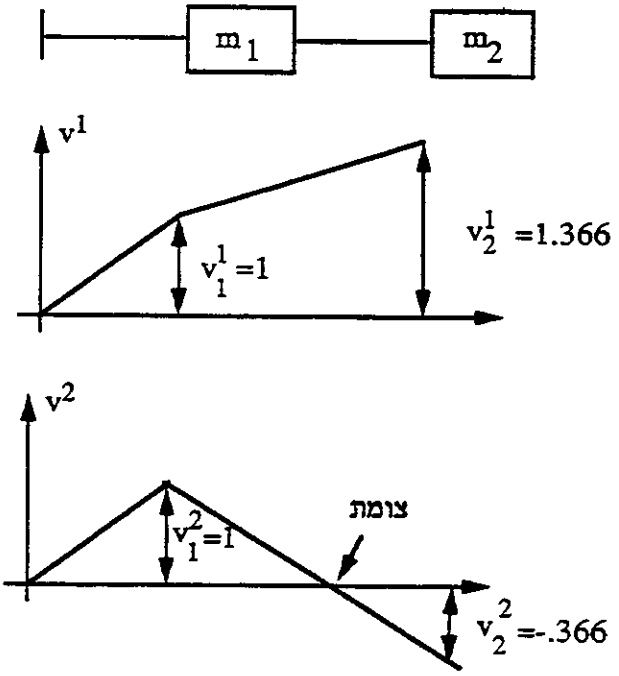
את הוקטורים המודלים v^i נוהגים לצייר בתורת הרטט כמוראה בציור 10.3 עבור המקרה של שתי דרגות חופש.

דוגמא: בדוגמא 10.4.8 מצאנו את המטריצה המודלית V של מערכת בת שתי דרגות חופש:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.366 & -0.366 \end{pmatrix}$$

התאור הגרפי בציור 10.3 מתאים איכותית למקרה זה.

בוקטור v^2 שבציור 10.3 יש שנוי סימן. פרוש הדבר שבנקודה מסוימת בין המסות m_1 ו-m_2 ההעתק הוא 0. נקודה כזו נקראת **צומת** (node).



ציור 10.3

10.6.5 מציאת a_i ו-ϕ_i מתנאי ההתחלה

אם נתונים תנאי ההתחלה של המערכת (10.6) , כלומר נתונים $q(o)$ ו-$\dot{q}(o)$, נקבל מ-(10.26)

$$q(o) = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{v}^i \cos \phi_i \tag{10.27}$$

ו-

$$\dot{q}(o) = \sum_{i=1}^{n} a_i \omega_i \bar{v}^i \sin \phi_i \tag{10.28}$$

מ-(10.17) ברור כי :

$$(\bar{v}^j)^T M \bar{v}^i = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \tag{10.29}$$

אם נכפול לכן את (10.27) ו-(10.28) ב-$(\bar{v}^j)^T M$ משמאל נקבל :

$$a_i \cos \phi_i = (\bar{v}^i)^T M q(o) \tag{10.30}$$

$$a_i \sin \phi_i = \frac{1}{\omega_i} (\bar{v}^i)^T M \dot{q}(o) \tag{10.31}$$

והצבת (10.30) ו-(10.31) ב-(10.26) תתן התגובה לתנאי התחלה:

$$q(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{v}^i (\cos(\omega_i t)\cos\phi_i + \sin(\omega_i t)\sin\phi_i)$$

$$q(t) = \sum_{i=1}^{n} (\bar{v}^i)^T M[q(o)\cos(\omega_i t) + \frac{1}{\omega_i}\dot{q}(o)\sin(\omega_i t)]\bar{v}^i \qquad (10.32)$$

10.6.6 מקרה פרטי

אם תנאי ההתחלה הם בכוון אחד הוקטורים המודלים דהיינו אם $\dot{q}(o) = 0$ ו-

$$q(o) = q_o \bar{v}^j \qquad (10.33)$$

כאשר q_o קבוע

נקבל מ-(10.32) ושמוש ב-(10.29)

$$q(t) = q_o \bar{v}^j \cos(\omega_j t) \qquad (10.34)$$

כלומר במקרה זה יעורר רק המוד ה-j.

10.6.7 דוגמא (המשך דוגמא 10.4.8 ו-10.5.4)

נתון כי:

$$q(o) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \dot{q}(o) = \begin{pmatrix} v_o \\ 0 \end{pmatrix}$$

נמצא תגובת המערכת עם שתי דרגות החופש. את $\bar{v}^i$ ו-ω_i מצאנו בסעיפים 10.4.8 ו-10.5.4.

נחשב:

$$\frac{1}{\omega_1}(\bar{v}^1)^T M\dot{q}(o) = 0.5774\,\frac{mv_o}{\sqrt{K}}$$

$$\frac{1}{\omega_2}(\bar{v}^2)^T M\dot{q}(o) = 0.5774\,\frac{mv_o}{\sqrt{K}}$$

הצבת הנ"ל ב-(10.32) מביאה ל-

$$q(t) = 0.5774\,\frac{mv_o}{\sqrt{K}}\,[\sin\left(0.7962\sqrt{\frac{K}{m}}\,t\right)\frac{1}{\sqrt{m}}\begin{pmatrix} 0.4597 \\ 0.6277 \end{pmatrix} +$$

$$+\ \sin\left(1.5382\sqrt{\frac{K}{m}}\,t\right)\frac{1}{\sqrt{m}}\begin{pmatrix} 0.8881 \\ -0.3251 \end{pmatrix}]$$

או:

$$q(t) = \sqrt{\frac{m}{K}}\, v_o \left\{ \begin{pmatrix} 0.2654 \\ 0.3626 \end{pmatrix} \sin\left(0.7962 \sqrt{\frac{K}{m}}\, t\right) + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 0.5127 \\ -0.1887 \end{pmatrix} \sin\left(1.5382 \sqrt{\frac{K}{m}}\, t\right) \right\}$$

10.7 הצגת מערכות רוטטות במרחב המצב

10.7.1 ניתן כמובן לתאר ולפתור מערכות רוטטות בכלים שפיתחנו במרחב המצב. ניתן לעשות זאת ישירות מתוך משואות התנועה הנתונות ב-(10.2) על ידי הגדרת וקטור המצב בדרך הבאה:

$$x \triangleq \begin{pmatrix} q \\ \hline \dot{q} \end{pmatrix} \tag{10.35}$$

כאשר $x \in R^{2n}$ אם $q \in R^n$.

הצגת (10.2) באמצעות (10.35) תתן:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \hline \ddot{q} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{array}{c} \\ n \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n & n \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{array}\right) \end{array}}_{A} x + \begin{array}{c} n \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \hline M^{-1} \end{pmatrix} \end{array} F \tag{10.36}$$

ועבור מערכת שאינה מרוסנת (C=0) נקבל:

$$\dot{x} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -M^{-1}K & 0 \end{array}\right)}_{A} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \hline M^{-1} \end{pmatrix} F \tag{10.37}$$

את (10.36) ו-(10.37) המתארים מערכות רוטטות במרחב המצב ניתן לנתח ולפתור בכלים של מרחב המצב.

הערות:

1) מ-10.3.3 ברור כי M^{-1} קימת תמיד.

2) למטריצות A שב-(10.36) וב-(10.37) 2n ע"ע-ים. קל להווכח כי הע"ע-ים של A שב-(10.37), המערכת הלא-מרוסנת, נתונים על ידי $\pm j\omega_i$ $(i = 1,\ldots n)$ כאשר ω_i היא התדירות הטבעית של המערכת ו- $j = \sqrt{-1}$.

10.7.2 דוגמא

את המערכת בעלת שתי דרגות חופש שבדוגמא 10.4.8 נציג במרחב המצב. לפי (10.35) נקבל,

$$x = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \qquad x \in R^4$$

ומשואות המצב המתאימות תהיינה לכן (לפי (10.37)):

$$\dot{x} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -\frac{2K}{m} & \frac{K}{m} & 0 & 0 \\ \frac{K}{2m} & -\frac{K}{m} & 0 & 0 \end{array}\right) x + \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2m} \end{array}\right)$$

10.8 תהודה במערכות רוטטות ללא רסון

10.8.1 נתיחס למערכת הנתונה ב-(10.5). נמצא את מטריצת התמסורת מ-F(s) ל-q(s) . לצורך זה נתמיר התמרת לפלס את (10.5) (עם תנאי התחלה 0) ונקבל:

$$(Ms^2 + K)\, q(s) = F(s)$$

מכאן ש-

$$q(s) = G(s)\, F(s) \tag{10.38}$$

כאשר:

$$G(s)_{n \times n} = (Ms^2 + K)^{-1} = \frac{Adj(Ms^2 + K)}{|Ms^2 + K|} \tag{10.39}$$

פונקצית התמסורת בין הכניסה ה-p , $f_p(s)$, לבין היציאה ה-k , $q_k(s)$, תהיה לכן:

$$\frac{q_k(s)}{f_p(s)} = g_{kp}(s) = \frac{[Adj(Ms^2 + K)]_{kp}}{|Ms^2 + K|} \tag{10.40}$$

10.8.2 ממשפט תגובת התדירות (ראה פרק 9 סעיף 9.1.1) אנו יודעים כי אם $f_p(t) = A \sin \omega t$ אזי $q_k(t)$ במצב מתמיד יהיה נתון על ידי:

$$q_k(t) = A\,|g_{kp}(j\omega)|\sin(\omega t + \arg(g_{kp}(j\omega))) \tag{10.41}$$

משפט (תהודה): באם התדירות ω של האילוץ החיצוני $f_p(t)$ שווה לאחת מהתדירויות הטבעיות, ω_i $(i = 1,2,\ldots,n)$, של המערכת אזי:

$$|g_{kp}(j\omega)|_{\omega \to \omega_i} \to \infty.$$

הוכחה: $q_{kp}(j\omega)$ נתונה על ידי:

$$g_{kp}(j\omega) = \frac{\mathrm{Adj}[-M\omega^2 + K]_{kp}}{|-M\omega^2 + K|}$$

והיות ולפי (10.12) התדירויות הטבעיות מקימות

$$|-M\omega^2+K| = 0$$

והביטוי האחרון הוא מכנה $g_{kp}(j\omega)$ אזי:

$$|g_{kp}(j\omega)| \xrightarrow[\omega \to \omega_i]{} \infty$$

ם

הערה: משפט תגובת התדירות הוכח עבור מערכות יציבות אסימפטוטית.

ניתן להרחיבו למערכות להן גם קטבים על הציר $j\omega$ במשור הקומפלקסי S. קטבי (10.40), כנאמר בסעיף 10.7.1, הם $\pm j\omega_i$ $(i = 1,\ldots,n)$