



**הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל  
הפקולטה להנדסת מכונות**

**חוברת תרגילים בדינמיקה  
034010**

עותק מתוקן - חורף תשס"ה  
2004/2005

תוקנה ע"י:

פרו"פ מיילס רובין

אבו-סאלח סאמי

מחאמיד ראשד

## פרק 1

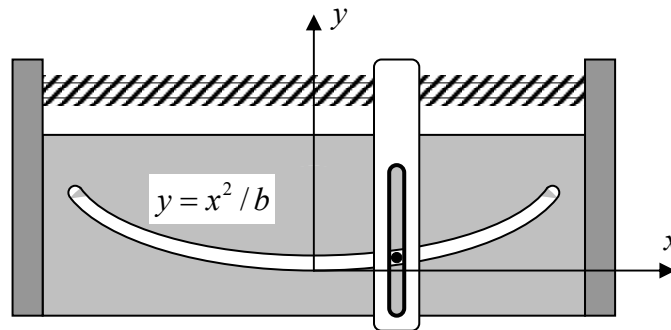
### 1.1 תרגיל

ניתן לטעון בקירוב טוב כי הגרר האווירודינמי על מכונית פרופורציוני לריבוע מהירותה. התנגדויות חיכוך אחרות מונחות כקבועות, כך שתאוצת המכונית כאשר היא משייטת (ללא מנוע) יכולה להיות מקורבת ע"י  $a = -c_1 - c_2 v^2$ , כאשר  $c_1$  ו- $c_2$  הם קבועים התלויים בצורת המכונית ו- $v$  היא מהירותה. לשם קביעת  $c_1$  ו- $c_2$  בוצע הניסוי הבא: המכונית החלה לשייט במהירות 80 קמ"ש. לאחר שעברה מרחק של 200 מטר, נמצא שמהירותה היא 60 קמ"ש. לאחר שעברה 200 מטר נוספים, נמצא שמהירותה היא 36 קמ"ש. דרוש לחשב את המרחק הכולל אותו תעבור המכונית מתחילת שיוטה עד שתיעצר כליל? תשובה: 528.1 מטר.

### 1.2 תרגיל

הפין במערכת מאולץ לנוע במסלול פרבולי שעל גבי הגוף הנח וכן בהריץ שנמצא בתוך המוט המוליך הניצב, כמתואר בציור. המוט נע בכיוון  $x$  במהירות קצובה של  $20 \text{ [mm/s]}$ . נתון:  $b = 160 \text{ [mm]}$ . דרוש למצוא:

- ביטוי למהירות של הפין  $P$ .
- ביטוי לתאוצה של הפין  $P$ .
- דרוש לחשב את המהירות והתאוצה של הפין כאשר הוא נמצא במרחק  $x = 60 \text{ mm}$ .



תשובה: ג.  $a = 5e_2 \text{ [mm/s}^2\text{]}, v = 20e_1 + 15e_2 \text{ [mm/s]}$

1.3 תרגיל

הנח כי וקטור התאוצה נתון על ידי:  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = (4t - 3)\mathbf{e}_1 + t^2\mathbf{e}_2$  כאשר  $\mathbf{e}_1$  ו- $\mathbf{e}_2$  הם וקטורי בסיס קבועים (של מערכת קרטזית עומדת). נתון שהמצב ההתחלתי הוא:  $t = 0, \mathbf{r} = 0, \mathbf{v} = 0$ .  
דרוש:

א. חשב את וקטור המהירות  $\mathbf{v}(t)$ .

ב. חשב את וקטור המקום  $\mathbf{r}(t)$ .

תשובה: ב. 
$$\mathbf{r} = \left( \frac{2t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} \right) \mathbf{e}_1 + \frac{t^4}{12} \mathbf{e}_2$$

1.4 תרגיל

חלקיק P נע בקו ישר מנקודה A:  $(1,1,1)$  לנקודה B:  $(-1,4,7)$ . (הערה: המרחק במטרים). נסמן וקטור יחידה שכוונו מ-A ל-B על ידי  $\mathbf{e}_{B/A}$  ואת המרחק מהנקודה A נסמן על ידי s. וקטור המקום של החלקיק P נתון על ידי:  $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_A + s\mathbf{e}_{B/A} = x_1(s)\mathbf{e}_1 + x_2(s)\mathbf{e}_2 + x_3(s)\mathbf{e}_3 = x_i(s)\mathbf{e}_i$ .  
דרוש:

א. מצא את הרכיבים הקרטזיים  $x_i(s)$  של החלקיק.

ב. מצא את הקואורדינטות של נקודה C על הקו AB (או על המשכו) שהיא הקרובה ביותר לראשית מע' הצירים  $\mathbf{e}_i$ .

ג. מהו המרחק בין הנקודה C ובין ראשית הצירים?

ד. מהו המרחק בין הנקודה C ובין הנקודה B?

תשובה: ב.  $\frac{1}{7}(9\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$  . ד. 8m

פרק 2

תרגיל 2.1

מושכים עגלה על מסלול בעזרת כבל שנכרך סביב תוף בקוטר 750 mm שמסתובב במהירות סיבוב [rpm] 120. המסלול ניתן לתואר ע"י המשוואה  $y = x^2/16$ . דרוש:

א. מצא ביטוי לתאוצה של העגלה כתלות ב-  $x$ .

ב. חשב את התאוצה של העגלה כאשר היא נמצאת מטר אחד מתחת לנקודה הגבוהה ביותר שלה.



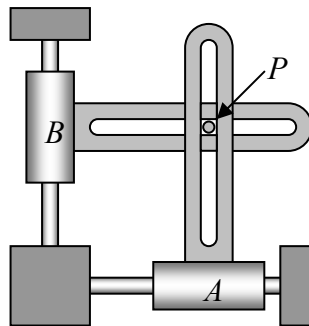
תשובות: א. 
$$\frac{v^2 \left( -\frac{x}{8} e_1 + e_2 \right)}{8 \left( 1 + \frac{x^2}{64} \right)^2}$$
 ב.  $a = 1.986 \text{ [m/s]}$

תרגיל 2.2

הפין P בין שתי החוליות מאולץ לנוע במוליכים המחורצים אשר יכולים לנוע בזווית ישרה זה לגבי זה. ברגע מסוים המוליך A נע בכיוון ימינה (במהירות  $0.2 \text{ [m/s]}$  ובתאוצה  $0.75 \text{ [m/s}^2]$ ). בעוד המוליך B נע בכיוון למטה (במהירות  $0.15 \text{ [m/s]}$  ובתאוצה  $0.5 \text{ [m/s}^2]$ ). דרוש:

א. מצא את רדיוס העקמומיות של מסלול הפין P ברגע הנתון.

ב. האם תוכל לחשב גם את קצב השינוי של רדיוס העקמומיות של הפין P באותו רגע.



תשובה:  $\rho = 1.25 \text{ [m]}$

## 2.3 תרגיל

חלקיק נע על הענף החיובי של מסלול המתואר ע"י המשוואה  $y^2 = 4x^3$ . הדרך שעובר החלקיק לאורך המסלול נתונה כפונקציה של הזמן ע"י  $s(t) = 2t^3$ ,  $y$ ,  $x$  נמדדים ב mm, והם פונקציה גם של  $s$ , ו- $t$  נמדד ב-sec).  $x = 0$  עבור  $t = 0$ . דרוש:

א. מצא את רדיוס העקמומיות של המסלול בנקודה בה ימצא החלקיק אחרי שנייה אחת.

ב. מצא את התאוצה באותו רגע.

תשובה: א.  $\rho = 17.84$  [mm] ב.  $\underline{a} = 2.095\underline{e}_1 + 11.99\underline{e}_2$

## 2.4 תרגיל

חלקיק נע בקצב קבוע  $b$  במישור  $e_1 - e_2$  לאורך העקום הכללי המוגדר על ידי  $y = y(x)$ . דרוש:

א. כתוב את וקטור המקום  $r$  של החלקיק כפונקציה של  $x$ .

ב. נגדיר את  $s$  כפרמטר של אורך הקשת, ובהנחה ש- $x = x(s)$ , חשב את  $dr/ds$ .

ג. נזכור כי  $e_t = dr/ds$  הוא וקטור יחידה, ובהנחה כי  $dx/ds \geq 0$ .

הראה כי  $ds/dx = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}$

ד. השתמש בחוק השרשרת  $\underline{v} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dx} \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt}$  וחשב את וקטור המהירות כפונקציה של  $x$ .

ה. חשב באופן דומה את וקטור התאוצה a.

ו. נזכור כי  $\underline{a} = \ddot{s}\underline{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\underline{e}_n$  ובהסתמך על התוצאות לעיל, הראה שרדיוס העקמומיות של עקום מישורי

כללי  $y = y(x)$  נתון ע"י  $\rho = \frac{(1 + (dy/dx)^2)^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$ .

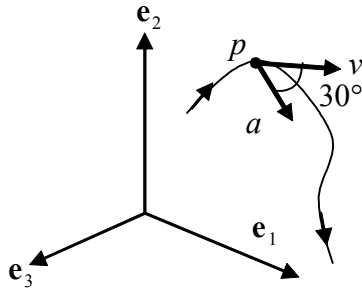
ז. מצא ביטוי עבור  $e_n$  (הנח  $d^2y/dx^2 \geq 0$ ).

פרק 3

3.1 תרגיל

החלקיק  $P$  נע על עקום מרחבי. ברגע מסוים המהירות היא  $\mathbf{v} = 4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$  [m/s]. הערך המוחלט של וקטור התאוצה הוא  $a = 10 \text{ m/s}^2$  וכונו מוטה בזווית  $30^\circ$  ביחס למהירות. דרוש:

א. קבע את רכיבי התאוצה בכיוון המסלול ובניצב לו.  
 ב. קבע את רדיוס העקמומיות של המסלול באותה נקודה.



תשובות: א.  $a_t = 8.66 \text{ m/s}^2$  . ב.  $\rho = 5 \text{ m}$

3.2 תרגיל

החלקיק  $P$  נע על עקום מרחבי כך שרכיבי המיקום במערכת קרטזית נתונים ע"י המשוואות הבאות:

$$x = 60 \cos \omega t, \quad y = 40 \sin \omega t, \quad z = 30t^2$$

בשניות  $t$ , ו-  $\omega = 2 \text{ rad/s}$ . דרוש:

א. תאר את מסלול החלקיק.

ב. קבע את וקטורי היחידה שבכווני המשיק והניצב בזמן  $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n)_{t=4 \text{ [s]}}$ .

ג. קבע את המהירות של החלקיק בזמן  $t = 4 \text{ [s]}$ .

ד. קבע את התאוצה של החלקיק בזמן  $t = 4 \text{ [s]}$ .

ה. קבע את רדיוס העקמומיות  $\rho$  בזמן  $t = 4 \text{ [s]}$ .

תשובות:

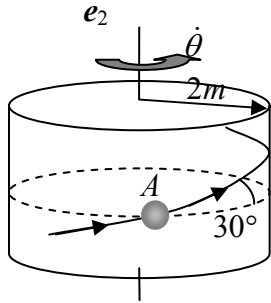
ב.  $\mathbf{e}_t = -0.443\mathbf{e}_1 - 0.043\mathbf{e}_2 + 0.896\mathbf{e}_3$  ;  $\mathbf{e}_n = 0.32\mathbf{e}_1 - 0.939\mathbf{e}_2 + 0.115\mathbf{e}_3$

ג.  $\mathbf{v} = -118.72\mathbf{e}_1 - 11.64\mathbf{e}_2 + 240\mathbf{e}_3$  . ד.  $\mathbf{a} = 34.9\mathbf{e}_1 - 158.3\mathbf{e}_2 + 60\mathbf{e}_3$

ה.  $\rho = 430.45 \text{ mm}$

3.3 תרגיל

חלקיק נע לאורך גליל צילינדרי, כמתואר בציור. בעוברו את נקודה A, גודל התאוצה מגיעה לערך של 10 [m/s<sup>2</sup>] ומגביר את מהירותו, בקו המסלול, בקצב של 8 [m/s<sup>2</sup>]. דרוש:



א. מהירותו -  $v$ .

ב. מהירותו הזוויתית -  $\dot{\theta}$ .

ג. התאוצה הזוויתית -  $\ddot{\theta}$ .

ד. התאוצה -  $a_z$ .

תשובות: א.  $v = 2\sqrt{3}e_\theta + 2\sqrt{3}tg(30)e_z$  ג.  $\ddot{\theta} = 2\sqrt{3}$  ד.  $a_z = 4m/s^2$

3.4 תרגיל

פיקה מסוימת ניתנת לתאור ע"י המשוואה:  $r = b - c \cos \beta$  כאשר הזווית  $\beta$  נמדדת בין המוט המחורץ לבין הקו OB הצמוד לפיקה. הציר שבכיוון  $e_r$  של המערכת הפולרית תמיד הוא צמוד למוט המחורץ. כדור קטן A נמצא בחריץ צמוד כל הזמן לשפת הפיקה (ע"י הקפיץ). נתון כי:  $b = 100$  [mm],  $c = 75$  [mm] ותנאי ההתחלה של המערכת הם  $\theta = \beta = 0$  (הקו OB מתלקד עם הציר  $e_1$ ). דרוש למצוא את רכיבי התאוצה

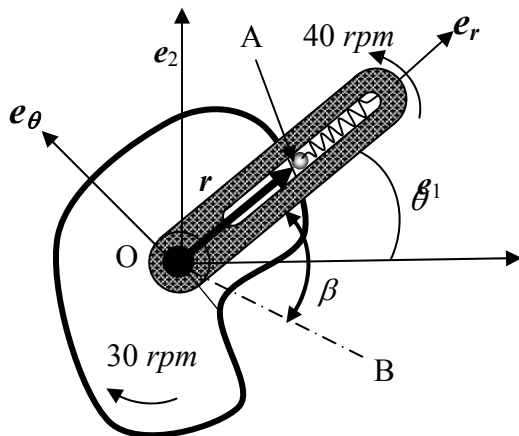
המוחלטת של הכדור A כאשר  $\beta = 30^\circ$  עבור התנאים הבאים:

א. הפיקה עומדת והמוט מסתובב כנגד כיוון השעון ב- 40 [rpm].

ב. המוט עומד והפיקה מסתובבת בכיוון השעון ב- 30 [rpm].

ג. והפיקה מסתובבת בכיוון השעון ב- 30 [rpm] והמוט מסתובב כנגד כיוון השעון ב- 40 [rpm].

תשובות:



א.  $a_A = 0.525e_r + 1.32e_\theta$  [m/s<sup>2</sup>]

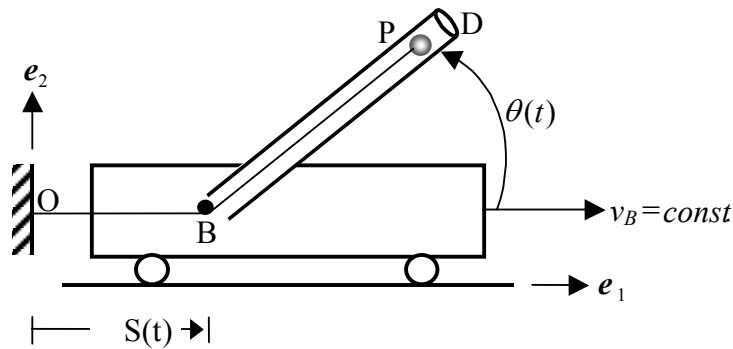
ב.  $a_A = 0.641e_r$  [m/s<sup>2</sup>]

ג.  $a_A = 2.88e_r + 2.30e_\theta$  [m/s<sup>2</sup>]

תרגיל 3.5

צינור חלול BD מחובר בציר B, המאפשר לו להסתובב בזווית  $\theta(t)$  במישור האנכי, אל עגלה שנעה במהירות קבועה  $v_B$  על מישור אופקי. חלקיק קטן, שנמצא בנקודה P בתוך הצינור, מחובר לקצה אחד של חוט שאורכו L, אשר קצהו השני מחובר לקיר בנקודה O. הגדלים  $\theta(t), S(t), L, v_B$  נתונים וידועים. דרוש:

- א. קבע וציין בסכימה את מערכות הצירים בהן תשתמש.
- ב. מצא את וקטור המהירות המוחלטת  $v(t)$  של החלקיק P.
- ג. מצא את וקטור התאוצה המוחלטת  $a(t)$  של החלקיק P.
- ד. מצא את וקטור המהירות של החלקיק P ביחס לצינור.
- ה. מצא את התאוצה של החלקיק P ביחס לצינור.
- ו. רשום ביטוי לווקטור יחידה  $e_i$  המשיק למסלול התנועה של P ברגע t.



תשובות:

ב. 
$$v(t) = \dot{S}(\cos \theta - 1)e'_1 + (-\dot{S} \sin \theta + (l - S)\dot{\theta})e'_2$$

ג. 
$$a = (-\ddot{S}(l - S)\dot{\theta}^2)e'_1 + ((l - S)\ddot{\theta} - 2\dot{S}\dot{\theta})e'_2$$

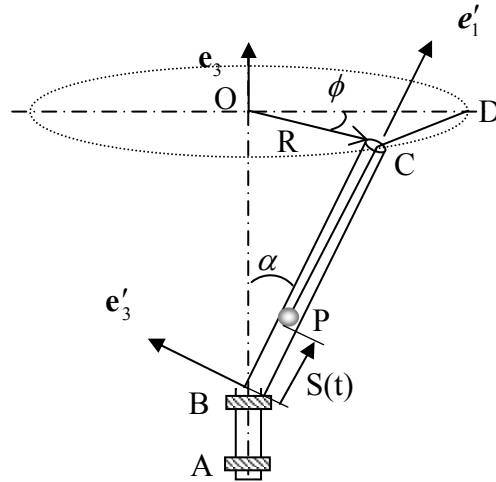
ד. 
$$v_{rel} = -\dot{S}e'_1$$



פרק 4

4.1 תרגיל

צינור כפוף ABC מסתובב בתוך מסבים סביב הציר האנכי OA במהירות זוויתית קבועה. חלקיק P שנמצא בתוך הצינור קשור לנקודה קבועה D ע"י חוט שאורכו קבוע.



$R, \alpha: \text{const.}$   
 נתונים:  $t = 0 \rightarrow \phi(0) = 0, \quad s(0) = 0$

דרוש:

- א. את המהירות המוחלטת  $\mathbf{v}^P$  של החלקיק.
- ב. את התאוצה המוחלטת  $\mathbf{a}^P$  של החלקיק.
- ג. את וקטור המהירות של החלקיק ביחס לצינור BC.
- ד. את תאוצה החלקיק ביחס לצינור BC.

תשובה: ג.  $\frac{\delta \mathbf{r}_P}{\delta t} = \left( R \dot{\phi} \cos \frac{\phi}{2} \right) \mathbf{e}'_1$       ד.  $\frac{\delta^2 \mathbf{r}_P}{\delta t^2} = \left( -\frac{R \dot{\phi}^2}{2} \sin \frac{\phi}{2} \right) \mathbf{e}'_1$

4.2 תרגיל

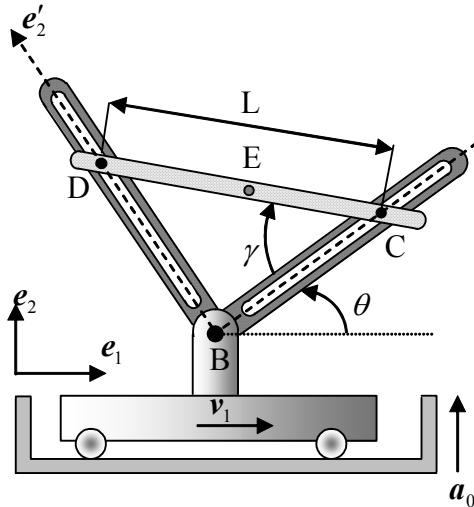
מעלית מאיצה בכיוון מעלה  $e_2$  בתאוצה קבועה  $a_0$ . על רצפת המעלית נעה עגלה במהירות קבועה  $v_1$  בכיוון  $e_1$ . מערכת הצירים  $e'_1, e'_2$  צמודה לשני המוטות BC ו-BD שמחוברים באופן קשיח והזווית ביניהם היא  $90^\circ$ . המסגרת של שני מוטות אלו מסתובבת במהירות זוויתית קבועה  $\dot{\theta}$ . בתוך המסגרת מחליק מוט DC כאשר  $\dot{\gamma}$  קבועה. E היא נקודת אמצע המוט. בזמן  $t=0$  מהירות המעלית אפס, כמו כן  $\gamma = \theta = 0$

עבור  $t$  כלשהו דרוש לחשב :

א.  $v_E$

ב.  $v_{EC}$

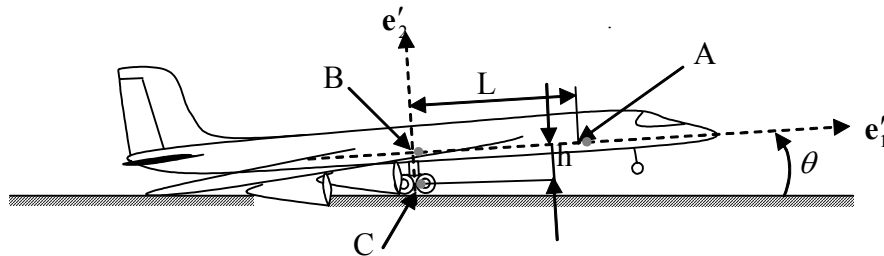
ג.  $a_E$



תשובה: ב.  $v_{EC} = L/2(\dot{\gamma} - \dot{\theta})(\sin \gamma e'_1 + \cos \gamma e'_2)$

4.3 תרגיל

קרוב לקצה מסלול ההמראה, מהירות ותאוצת מרכז גלגלי המטוס C הן:  $v_c$  ו-  $a_c$  בכיוון אופקי. באותו רגע מתחיל המטוס להרים את האף במהירות זוויתית ותאוצה זוויתית  $\dot{\theta} = \omega$  ו-  $\dot{\alpha} = \alpha$ . אדם A הנמצא במרחק  $L(t)$  מנקודה B הולך בשביל המרכזי במטוס לכיוון הנקודה B במהירות יחסית ותאוצה יחסית  $v_{rel}$  ו-  $a_{rel}$  ביחס למטוס. דרוש: לפתח ביטוי למהירות ותאוצה המוחלטים של אדם A.



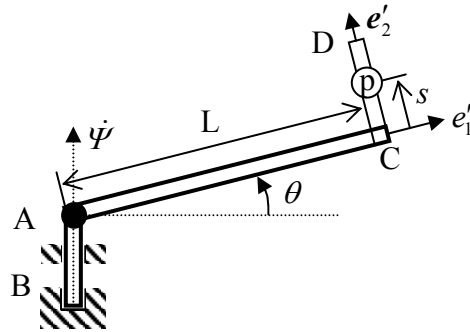
תשובה:  $v_A = (v_c \cos \theta - \omega h + v_{rel})e'_1 + (\omega L - v_c \sin \theta)e'_2$

$a_A = (a_c \cos \theta - \alpha h - L\omega^2 + a_{rel})e'_1 + (-a_c \sin \theta - h\omega^2 + L\alpha + 2v_{rel}\omega)e'_2$

## תרגיל 4.4

המוט המכופף ACD מחובר למוט אנכי AB באמצעות פרק חד צירי A. המוט AB מסתובב במהירות זוויתית קבועה  $\dot{\psi}$ . הזווית  $\theta$  משתנה בקצב קבוע  $\dot{\theta}$ . חרוז P נע במהירות קבועה  $\dot{s}$  על גבי DC. דרוש:  
 א. למצוא ביטוי עבור המהירות המוחלטת של החרוז P, ברכיבי מערכת הצירים  $e'_i$  הצמודה למוט המכופף, עבור  $\theta$  כלשהי.

ב. עבור הרגע בו  $\theta = 0$ , יש לכתוב ביטוי עבור התאוצה המוחלטת של החרוז.



תשובה: א.  $\mathbf{v}_P = -s\dot{\theta}\mathbf{e}'_1 + (L\dot{\theta} + \dot{s})\mathbf{e}'_2 + (s\dot{\psi}\sin\theta - L\dot{\psi}\cos\theta)\mathbf{e}'_3$ .

פרק 5

5.1 תרגיל

חלקיק A נע במהירות קבועה  $v$  בחריץ שמקביל לציר  $e_2$  והחלקיק תמיד במגע עם הדיסקה. הדיסקה (שרדיוסה R) מסתובבת במהירות זוויתית קבועה  $\dot{\theta} = \omega > 0$ , מערכת הצירים  $e'_i$  צמודה לדיסקה. הנקודה  $A'$  היא נקודת המגע הרגעי בין הדיסקה והחלקיק A. בזמן  $t = 0$ ,  $\theta = 0$  והחלקיק A נמצא על הציר  $e_1$ , באותו זמן זה החלקיק A לא מחליק על הדיסקה.

א. חשב את גודל המהירות של החלקיק A ( $v$ ) כפונקציה של  $b, \omega$ .

ב. חשב את הקואורדינטות  $x'_i(t)$  יחסית למערכת  $e'_i$  של הוקטור  $x_A$

אשר מתאר את מסלול הנקודה A על הדיסקה.

ג. חשב את מהירות ההחלקה של החלקיק A יחסית לדיסקה.

ד. חשב את המהירות המוחלטת של נקודת המגע הרגעי  $A'$ .

ה. חשב את המהירות היחסית בין הנקודה A והנקודה  $A'$ .

תשובות:

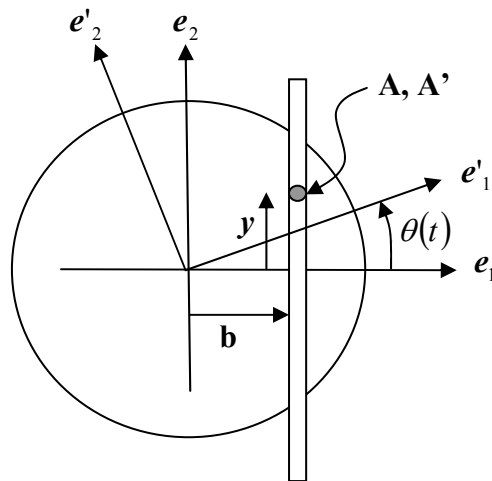
א.  $v = b\omega$

ב.  $x'_1(t) = b(\cos(\omega t) + \omega t \sin(\omega t)), \quad x'_2(t) = b(\omega t \cos(\omega t) - \sin(\omega t))$

ג.  $b\omega^2 t(\cos(\omega t)e'_1 - \sin(\omega t)e'_2)$

ד.  $v_{A'} = \omega b [((\cos(\omega t) + \omega t \sin(\omega t))e'_1 + (\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t))e'_1)]$

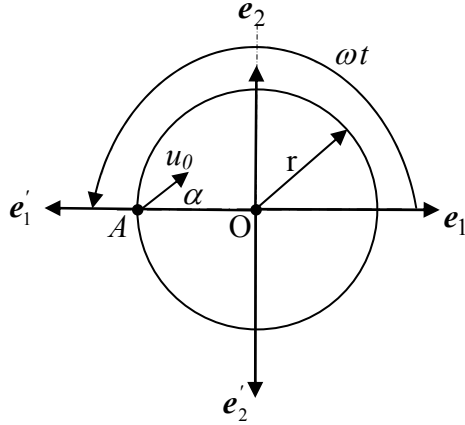
ה.  $b\omega^2 t(\cos(\omega t)e'_1 - \sin(\omega t)e'_2)$



5.2 תרגיל

אדם עומד בנקודה A על פלטפורמה אופקית סובבת, בעלת רדיוס r. הפלטפורמה מסתובבת במהירות זוויתית קבועה  $\omega$ . בזמן  $t = \frac{\pi}{\omega}$  האדם זורק כדור במהירות  $u_0$  ובזווית  $\alpha$  כלשהי יחסית לפלטפורמה. דרוש:

- א. מהן המהירות  $u_0$  והזווית  $\alpha$  כך שהכדור יעוף במהירות מוחלטת V, בכיוון  $e_1$  ?  
 ב. בהנחה שווקטור המהירות הכדור נשאת קבועה, מהו מסלול הכדור ע"ג הפלטפורמה במערכת  $e'_i$  (הצמודה לפלטפורמה) עבור  $t \geq \frac{\pi}{\omega}$  ?



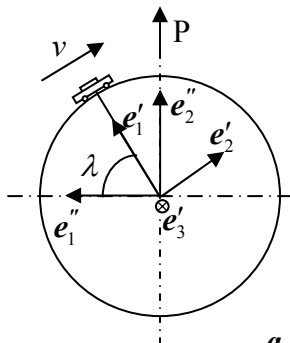
תשובות:

$$u_0 = \frac{V}{\cos \alpha}, \quad \tan \alpha = \frac{\omega r}{V}$$

$$x_A = \left( V(t - \frac{\pi}{\omega}) - r \right) e_1 = \left( V(t - \frac{\pi}{\omega}) - r \right) (\cos(\omega t) e'_1 - \sin(\omega t) e'_2)$$

5.3 תרגיל

מכונית נוסעת צפונה במהירות קבועה v יחסית לפני כדור הארץ, כשהיא חולפת על פני קו רוחב  $\lambda$ . כדור הארץ, שרדיוסו R, מסתובב במהירות זוויתית קבועה  $p$  סביב ציר הקטבים. ניתן להזניח את תנועת מרכז כדור הארץ במרחב. נתון ש-  $\dot{e}_i'' = \Omega \times e_i''$  כאשר  $\Omega = p e_2''$ ,  $\dot{e}_i' = \omega \times e_i'$  כאשר  $\omega = p e_2'' + \dot{\lambda} e_3'$ . דרוש: לבחור אחת משתי המערכות ולחשב את התאוצה המוחלטת של המכונית.



תשובה:

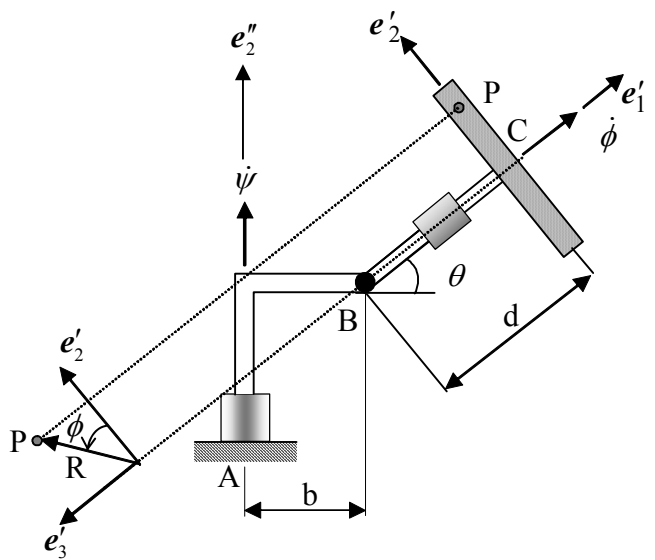
$$a_A = \left( -\frac{v^2}{R} - p^2 R \cos \lambda \right) e_1'' - \frac{v^2}{R} \sin \lambda e_2'' + 2pv \sin \lambda e_3''$$

$$a_A = \left( -p^2 R \cos^2 \lambda - v^2 / R \right) e_1' + p^2 R \cos \lambda \sin \lambda e_2' + 2pv \sin \lambda e_3'$$

5.4 תרגיל

תנועתה של דיסקה נקבעת ע"י שלושה מנועים הסובבים במהירויות זוויתיות קבועות  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$  ו- $\dot{\phi}$ . נתון שמערכת הצירים  $e'_i$  צמודה למוט BC ואיננה מסתובבת עם הדיסקה כך ש- $e'_1$ ,  $e'_2$  ו- $e'_3$  נמצאים באותו מישור כל הזמן. על היקף הדיסקה נמצאת נקודה P במרחק R ממרכז הדיסקה. דרוש למצוא את הביטויים של:

- א. מהירות ותאוצה (מוחלטות) של מרכז הדיסקה.
- ב. מהירות ותאוצה של P יחסית ל- C.
- ג. מהירות ותאוצה מוחלטות של P.



תשובה:

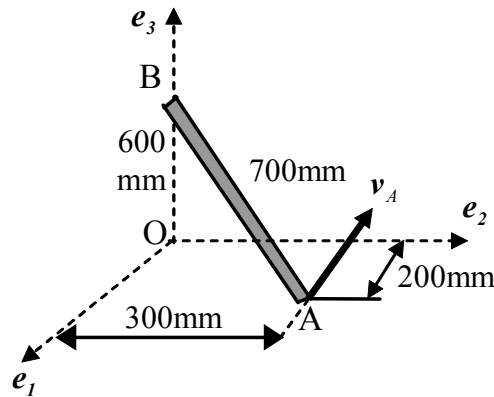
$$v_p \cdot e'_1 = \dot{\psi}R \cos \theta \sin \phi - R\dot{\theta} \cos \phi \quad \text{ג.}$$

$$v_c = \dot{\theta}de'_2 - (\dot{\psi}b + \dot{\psi}d \cos \theta)e'_3 \quad \text{א.}$$

פרק 6

6.1 תרגיל

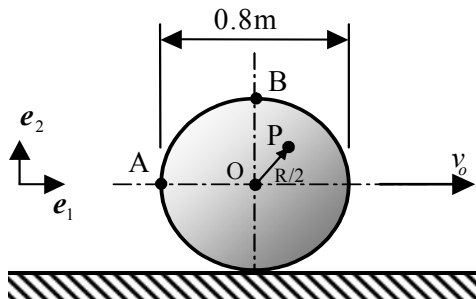
הקצה  $A$  של החוליה הקשיחה  $AB$ , מאולץ לנוע בכיוון  $(-e_1)$  במהירות  $v_0$ , כאשר הקצה  $B$  מאולץ לנוע בכיוון  $e_3$ . יש למצוא את המהירות הזוויתית של החוליה, כאשר היא חולפת על פני המצב הנתון בצירור. נתון כי  $v_0 = 0.3 \text{ m/sec}$  ואורך המוט הוא  $700 \text{ [mm]}$ .



תשובה: 
$$\omega_n = \frac{1}{0.49}(-0.03e_1 + 0.2e_2 + 0.09e_3) \quad \left[ \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$$

6.2 תרגיל

המרכז  $O$  של דיסקה מעגלית שרדיוסה  $0.4 \text{ m}$ , אשר מתגלגלת ללא החלקה על המישור האופקי, נע ימינה במהירות  $v_0 = 0.3 \text{ m/s}$ . דרוש:  
 א. מצא את וקטור המהירות של הנקודה  $P$  (נק' כללית במרחק חצי הרדיוס ממרכז הדיסקה).  
 ב. מצא את וקטור המהירות היחסית של הנקודה  $B$  ביחס לנקודה  $A$ .



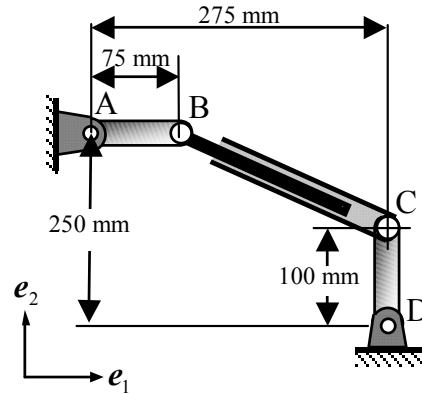
תשובה: 
$$v_{B/A} = 0.3(e_1 - e_2) \quad \text{m/s}$$

6.3 תרגיל

המהירויות הזוויתיות של החוליות  $AB$  ו- $DC$  הן:

$$\omega_{D/C} = -0.5 e_3 \quad [rad/sec] \quad \omega_{A/B} = -0.5 e_3 \quad [rad/sec]$$

דרוש לחשב את המהירות הזוויתית של החוליה הטלסקופית  $BC$  (במצב הנוכחי)

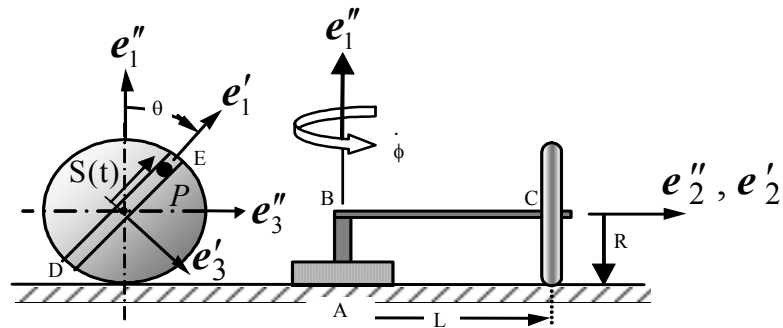


תשובה:  $\omega = 0.24 e_3 \text{ rad/s}$

6.4 תרגיל

- דיסקה עגולה ממוסבת על ציר אופקי  $BC$  שמסתובב במהירות זוויתית קבועה  $\dot{\phi}$  סביב הציר האנכי  $AB$ . הדיסקה מתגלגלת ללא החלקה על גבי המישור האופקי. דרך מרכז הדיסקה עובר צינור רדיאלי חלק  $DE$ . בתוך הצינור נע חלקיק קטן  $P$ . מערכת צירים  $e'_i$  היא צמודה לדיסקה.  $\theta(t)$  היא זווית הצינור.  $S(t)$  הוא מרחק החלקיק ממרכז הדיסקה. המהירות הזוויתית של הציר היא:  $\dot{\phi} = 4 \text{ rad/s}$ . רדיוס הדיסקה הוא:  $R = 60 \text{ cm}$ . אורך הקטע האופקי  $BC$  של הציר הוא:  $L = 60 \text{ cm}$ . דרוש:
- מצא את המהירות הזוויתית,  $\omega$ , של הדיסקה.
  - חשב את ערך המהירות הזוויתית כאשר  $\theta = 30^\circ$ .
  - בטא את המהירות המוחלטת  $v$  של החלקיק ברכיבים של המערכת  $e'_i$ .
  - בטא את התאוצה המוחלטת  $a$  של החלקיק ברכיבים של המערכת  $e'_i$ .





תשובות:

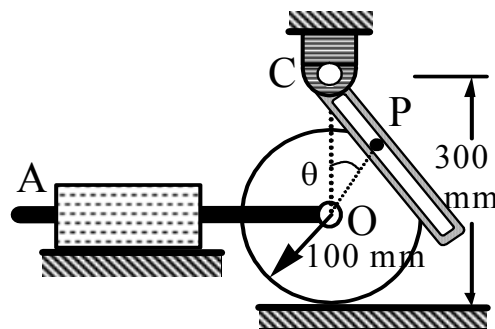
$$א. \omega = \dot{\phi} e_1'' + \dot{\theta} e_2' = \dot{\phi} \cos \theta e_1' - \dot{\phi} \sin \theta e_3' - \dot{\theta} e_2'$$

$$ב. \theta = 30^\circ \Rightarrow \omega = 2\sqrt{3} e_1' - 2 e_3' - 4 e_2'$$

$$ג. v_P = (\dot{S} - R\dot{\theta} \sin \theta) e_1' + (-R\dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta} S) e_3' - \dot{\phi} S \sin \theta e_2'$$

### 6.5 תרגיל

הגלגל במערכת מתגלגל ללא החלקה על המישור האופקי. ברגע מסוים, כאשר מרכז הגלגל O עובר בדיוק מתחת לנקודה C, מהירות הנקודה O היא  $v = 1.5$  [m/s] בכיוון ימין והפין P נמצא בזווית  $\theta = 30^\circ$  כמתואר בסכימה. דרוש לחשב את גודל המהירות הזוויתית של המוט המחורץ.

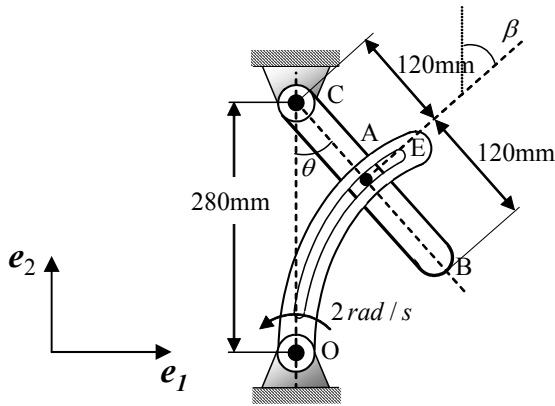


תשובה:  $\omega = 18.2 \left[ \frac{rad}{sec} \right]$

פרק 7

7.1 תרגיל

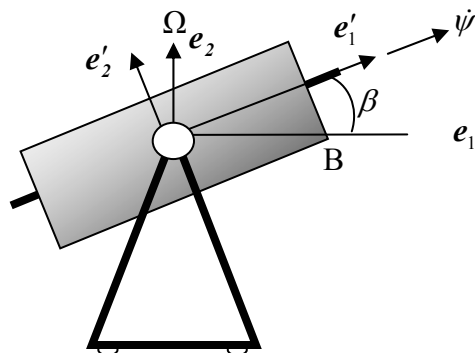
ברגע נתון, הזרוע המעוגלת סובבת בניגוד לכיוון השעון סביב ציר O במהירות זוויתית של  $2 \text{ [rad/s]}$ . ברגע הנתון:  $\theta = 30^\circ$ ;  $\beta = 45^\circ$  היא הזווית בין משיק העקום OA לבין האנך). הזיז A, המחובר לזרוע CB עובר במסילה של הזרוע המעוגלת. דרוש: למצוא את וקטור המהירות של הנקודה B.



תשובה:  $v_B = -2.234 e_1 - 1.29 e_2 \text{ [m/s]}$

7.2 תרגיל

בסכימה מתואר מתקן לאימון אסטרונומיים. תוף B ממוסב על ציר אופקי במסגרת אשר מסתובבת סביב ציר אנכי במהירות זוויתית  $\Omega$ . זווית ציר התוף ביחס לאופק היא  $\beta$ . בתוך התוף נמצא תא האימון אשר מסתובב סביב הציר  $e'_1$  במהירות זוויתית  $\psi$  יחסית לתוף. בניסוי מסוים נמדדו הגדלים הבאים:  $\beta = 0$ ,  $\dot{\beta} = 0.9 \text{ rad/s}$ ,  $\Omega = 0.2 \text{ rad/s}$ ,  $\dot{\psi} = 0.9 \text{ rad/s}$ . באותו רגע זה נתון גם ש:  $\ddot{\psi} = \ddot{\beta} = \dot{\Omega} = 0$ . דרוש: לקבוע את וקטורי המהירות הזוויתיות  $\omega$  ואת התאוצה הזוויתית  $\dot{\omega}$  של התא.

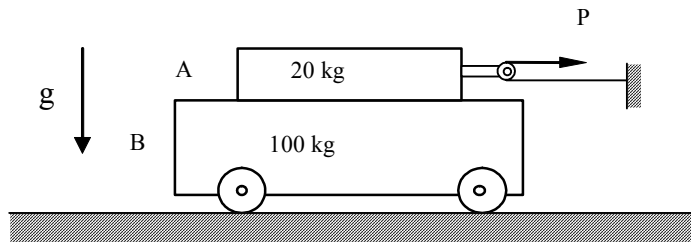


תשובה:  $\omega = 0.9 e'_1 + 0.2 e'_2 + 0.9 e'_3 \text{ [rad/s]}$  ,  $\dot{\omega} = 0.18 e'_1 + 0.81 e'_2 - 0.18 e'_3 \text{ [rad/s}^2\text{]}$

7.3 תרגיל

נתונה מערכת בה שתי מסות, המסה העליונה  $m_1 = 20 \text{ kg}$  והמסה התחתונה  $m_2 = 100 \text{ kg}$ . מקדם החיכוך בין שתי המסות הוא  $\mu = 0.5$ . המסה התחתונה נעה על גלגלים חסרי חיכוך וחסרי מסה. למסה העליונה מחוברת גלגלת (חסרת חיכוך) שסביבה מלופף חוט המחובר בקצה אחד לקיר ובקצה השני פועל כוח  $P$  כפי שניתן לראות בציור. דרוש:

1. שרטט על אותו גרף את התאוצות של המסות A ו B כנגד הכוח  $P$ .
2. קבע את גודל התאוצות של כל אחת מהמסות עבור שני המקרים הבאים: א.  $P = 40 \text{ N}$ . ב.  $P = 60 \text{ N}$ .



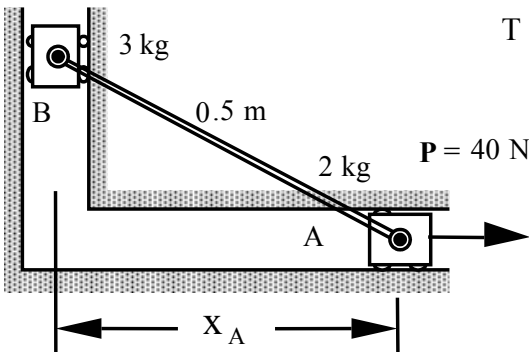
תשובות: א.  $|a_A| = |a_B| = 0.67 \text{ m/s}^2$ . ב.  $|a_A| = 1.095 \text{ m/s}^2, |a_B| = 0.981 \text{ m/s}^2$ .

7.4 תרגיל

המסות A ו-B מחוברות ע"י מוט קשיח AB שאורכו  $L = 0.5 \text{ m}$ . המסות נעות בתוך מסילות חסרות חיכוך וניתן להזניח את כוח הכובד. ידוע שכאשר המסה A נמצאת במרחק  $x_A = 0.4 \text{ m}$  כפי שמתואר בציור מהירותה הייתה  $v = 0.9 \text{ m/s}$  ימינה. דרוש לחשב:

- א. את התאוצה של כל אחת משתי המסות.
- ב. את כוח המתיחה  $T$  במוט AB.

תשובות: א.  $a_A = 1.364 \text{ m/s}^2, a_B = -9.32 \text{ m/s}^2$ . ב.  $T = 46.59 \text{ N}$ .

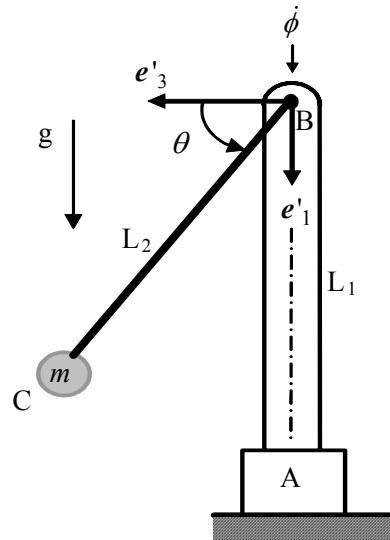


פרק 8

תרגיל 8.1

מנוע A מסובב ציר אנכי AB במהירות זוויתית קבועה  $\dot{\phi}$ . בנקודה B מחובר לציר AB, מנוע נוסף אשר מסובב את המוט BC במהירות זוויתית קבועה  $\dot{\theta}$ . בנקודה C מחוברת מסה נקודתית  $m$ . המידות הגיאומטריות מפורטות בציור. מערכת  $e'_i$  צמודה לציר הסיבוב AB. דרוש:

- א. מצא את וקטור התאוצה של מסה  $m$ .
- ב. מהו הכוח שמפעיל המוט BC על המסה  $m$ .
- ג. מהו וקטור כוח הגזירה שמפעילה המסה על המוט BC.



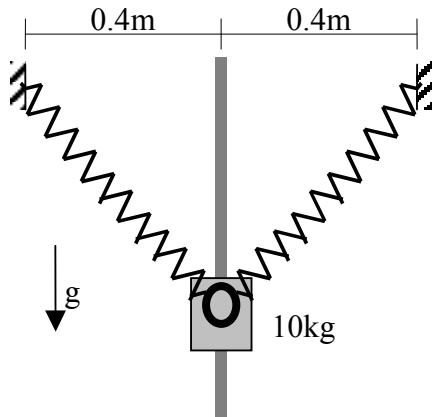
תשובות:

א. 
$$\mathbf{a} = L_2 \left[ -\dot{\theta}^2 L_2 \sin \theta \mathbf{e}'_1 + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}'_2 - (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) \cos \theta \mathbf{e}'_3 \right]$$

ב. 
$$\mathbf{F} = m(\mathbf{a} - g \mathbf{e}'_1)$$

8.2 תרגיל

מסה בת 10 kg יכולה להחליק ללא חיכוך לאורך מוט אנכי. למסה מחוברים שני קפיצים זהים ובעלי אותו קבוע קפיץ  $k = 800 \text{ N/m}$  ואורך חופשי 0.3 m. במצב ההתחלתי היו הקפיצים במצב אופקי באורך 0.4 m



ומהירות המסה כלפי מטה הייתה:  $v = 2.0 \text{ [m/s]}$ . דרוש:

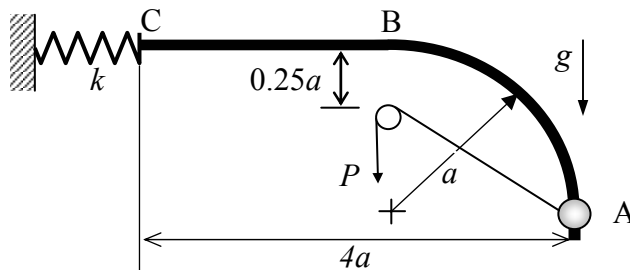
- א. קבע את המרחק המקסימלי אליו תגיע המסה.
- ב. מהי מהירות המסה ברגע שהיא עוברת את חצי המרחק.

תשובות: א. 0.45m ב. 2.46 m/s

8.3 תרגיל

על חרוז בעל מסה  $m = 10 \text{ kg}$  מופעל כוח קבוע  $P = 250 \text{ N}$  ע"י חוט העובר דרך גלגלת קטנה חסרת חיכוך, כפי שמתואר בציור. החרוז נע מנקודה A בה הוא נמצא במצב מנוחה עד לנקודה B על גבי מסלול רבע מעגלי ללא חיכוך. מנקודה B הכוח P מפסיק לפעול והחרוז נע על גבי מסלול אופקי עם מקדם חיכוך  $\mu = 0.5$  עד לנקודה C. בנקודה C החרוז מתנגש ונדבק לקפיץ חסר מסה בעל קשיחות  $k$ . נתון שרדיוס המסלול המעגלי AB הוא:  $a = 2.4 \text{ m}$ .

- א. חשב את עבודת הכוח P ממצב A למצב B.
- ב. מצא את מהירות החרוז בנקודה B.
- ג. חשב את עבודת כוח החיכוך ממצב B למצב C.
- ד. מצא  $k$  עבורו ההתכווצות המקסימלית של הקפיץ היא  $\delta_{\max} = 10 \text{ cm}$ .

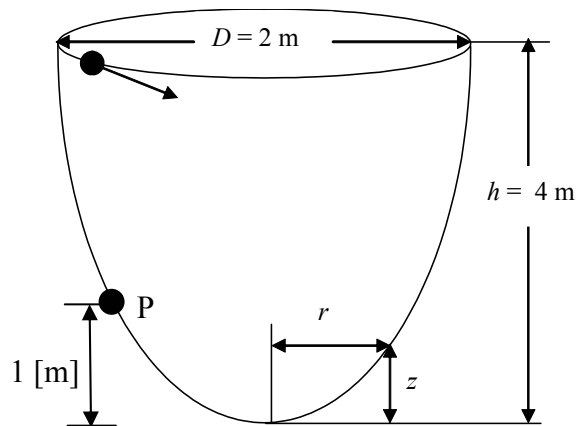


תשובות: א.  $W_P = 600 \text{ J}$  ב.  $v_B = 8.54 \text{ m/s}$  ג.  $W_\mu = -353 \text{ J}$  ד.  $k = 2.33 \text{ kN/m}$

8.4 תרגיל

נתונה קערה פרבולית אשר מתוארת ע"י הפונקציה  $z = 4r^2$ . קוטר הקערה בקצה העליון הוא  $D = 2.0$  [m]. פני המשטח של הקערה חלקים וחסרי חיכוך. חלקיק קטן שמסתו 1kg נזרק בכיוון אופקי לחלק העליון של הקערה במהירות  $3$  [m/s]. דרוש:

- לחשב את מהירות החלקיק כאשר הוא עובר בנקודה P אשר נמצאת בגובה מטר אחד מהבסיס.
- מה תהיה זווית הנטייה של וקטור המהירות ביחס למישור האופקי בנקודה P.
- מהו הכוח שמפעיל החלקיק על הקערה בנקודה P.
- רשום משוואה שממנה אפשר למצוא את משך הזמן עד שהחלקיק יגיע לנקודה P.



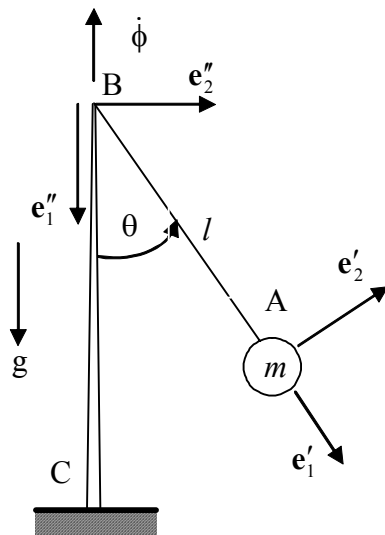
תשובות: א.  $|v| = 8.2366$  m/s . ב.  $\alpha = \pm 41.65^\circ$  . ג.  $|F| = 75.86$  N

פרק 9

תרגיל 9.1

מסה נקודתית  $m$  מחוברת לקצה  $A$  של חוט שאורכו  $l$  וקצהו השני מקובע אל נקודה  $B$  שנמצאת בראשו של העמוד האנכי הקבוע  $BC$ . ברגע  $t = 0$   $\dot{\theta}(0) = 0$  והחוט נטוי בזווית  $\theta(0) = \theta_0$  ביחס לאנך. ברגע זה נותנים לו מהירות התחלתית אופקית שגודלה  $v_0$  (בכיוון  $-\mathbf{e}'_3$ ). כתוצאה מכך מתחילה תנועה של המסה. הזווית  $\theta$  ו-  $\phi$  מוגדרות בציר. בפתרון יש להשתמש במערכות הצירים כפי שמוגדרות בציר.  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$  ו-  $(\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2)$  נמצאים במישור אנכי שמסתובב במהירות זוויתית  $\dot{\phi}$ . דרוש:

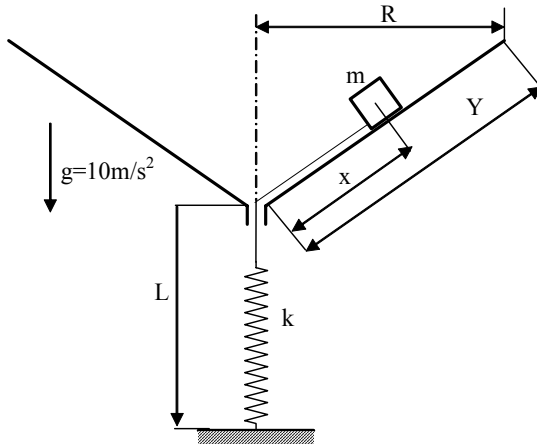
- א. האם נשמר התנע הקווי בכיוון  $\mathbf{e}'_3$ ?
- ב. האם נשמר התנע הזוויתי ביחס ל-  $B$  בכיוון  $\mathbf{e}''_3$ ?
- ג. האם נשמר התנע הזוויתי ביחס ל-  $B$  בכיוון  $\mathbf{e}''_1$ ?
- ד. האם החוט מבצע עבודה על המסה?
- ה. מהו התנע הזוויתי ביחס ל-  $B$  בכיוון  $\mathbf{e}''_1$ ?
- ו. מהי האנרגיה הקינטית של החלקיק?
- ז. מהו הביטוי עבור  $\dot{\phi}$ ?
- ח. מהו הביטוי עבור  $\dot{\theta}$ ?
- ט. מהי תאוצת המסה בכיוון  $\mathbf{e}'_2$ ?
- י. מהי המתיחות בחוט?



9.2 תרגיל

חלקיק (m = 2kg) קשור לקפיץ (k = 30 N/m) נמצא בתוך משפך קוני חסר חיכוך שרדיוס בסיסו R = 3m ואורך קו היוצר Y = 5m. הקפיץ רפוי כאשר החלקיק נמצא בתחתית הקונוס. בזמן t = 0 החלקיק נמצא במרחק x<sub>0</sub> = 4m מהקצה התחתון של הקונוס ומהירותו v<sub>0</sub> = 3 m/s בכיוון היקפי. דרוש:

- א. רשום משוואה ממנה אפשר למצוא את מרחק החלקיק כפונקציה של הזמן, x(t).
- ב. מצא את המרחק המינימלי מתחתית הקונוס אליו יגיע החלקיק.
- ג. מה תהיה מהירות החלקיק במרחק המינימלי?



תשובות:

$$313 - \left( \dot{x}^2 + \frac{12}{x} \right)^2 - 16x - 15x^2 = 0 \quad \text{א.}$$

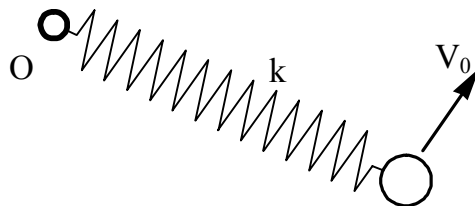
$$x_{min} = 0.7 \text{ m} \quad \text{ב.}$$

$$v_{max} = 17.14 \text{ [m/s]} \quad \text{ג.}$$

9.3 תרגיל

מסה m מונחת ללא תנועה על שולחן אופקי חסר חיכוך, קשורה ע"י קפיץ בעל מקדם k ואורך חופשי r<sub>0</sub> לנקודה קבועה O. ברגע t = 0 אורך הקפיץ הוא r<sub>0</sub>, מקנים למסה מהירות v<sub>0</sub> בכיוון ניצב לקפיץ. דרוש:

- א. האם התנע הקווי, התנע הזוויתי והאנרגיה הכוללת נשמרים?
- ב. תאר במילים את התנהגות המסה עם הזמן.

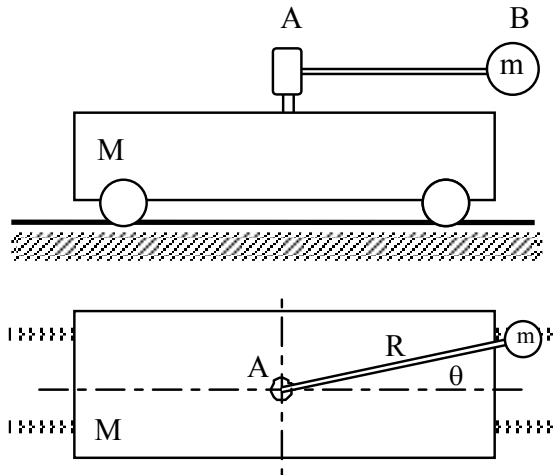




9.4 תרגיל

עגלה שמסתה  $M$  נעה על מסילה. על העגלה מורכב מוט אופקי  $AB$  שמסתו זניחה ואורכו  $R$ . המוט מורכב על ציר חסר חיכוך כך שהוא חופשי להסתובב סביב ציר אנכי. לקצה  $B$  של המוט מחוברת מסה נקודתית  $m$ , ניתן להזניח חיכוך בין העגלה למסילה. תנאי התחלה: מהירות העגלה  $\dot{x}(0) = v$ , מקום המוט  $\theta(0) = 0$  והמהירות הזוויתית של המוט  $\dot{\theta}(0) = \omega_0$ . הערה: מפני שלא מופעל מומנט בנקודה  $A$ , ומפני שהמוט חסר מסה ורק יכול להעביר כוח צירי בין  $A$  ל- $B$ , ניתן להתייחס למערכת כמערכת חלקיקים. את התוצאות יש לרשום בעזרת הנתונים:  $\omega_0, M, R, v, m$ . דרוש לחשב את:

- א. מהירות העגלה כאשר  $\theta = \pi$ ?
- ב. המהירות הזוויתית של המוט כאשר  $\theta = \pi$ ?
- ג. המהירות הזוויתית המכסימלית והמינימלית של המוט?
- ד. המהירות המכסימלית והמינימלית של העגלה?



תשובות: א.  $v_A(\theta = \pi) = v$ . ב.  $\dot{\theta}(\theta = \pi) = \omega_0$ . ג.  $\dot{\theta}_{\min} = \omega_0$ ;  $\dot{\theta}_{\max} = \omega_0 \sqrt{\frac{M+m}{M}}$ .

ד.  $\dot{x}_{\max}|_A = v + \frac{R\omega_0 m}{\sqrt{M(M+m)}}$ ;  $\dot{x}_{\min}|_A = v - \frac{R\omega_0 m}{\sqrt{M(M+m)}}$ .

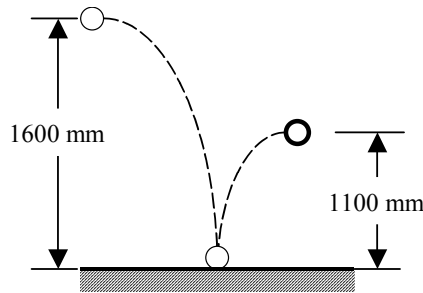
פרק 10

10.1 תרגיל

בבדיקת כדורי טניס פוסלים כדור אם מתברר שהוא איננו קופץ חזרה לפחות לגובה המותנניים כאשר הוא משוחרר מגובה הכתף. יש להניח שהגבהים הם כפי שמתואר בציור. דרוש:

- א. מהו מקדם התקומה המינימלי כדי שהכדור לא יפסל.
- ב. מה יהיה הפסד האנרגיה המכסימלי של כדור שלא נפסל (באחוזים).

תשובות: א.  $e = 0.829$  ב. 31 %

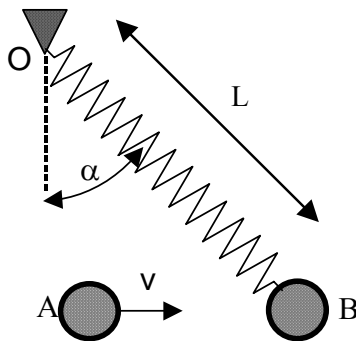


10.2 תרגיל

חלקיק A שמסתו  $m$  נע במהירות קבועה  $v$  על מישור אופקי חסר חיכוך. החלקיק מתנגש חזיתית במקדם תקומה  $e$ , בחלקיק B בעל אותה מסה  $m$  שנמצא באותו מישור. החלקיק B קשור לקפיץ שקשיחותו  $k$  אשר אורכו החופשי הוא  $L$  וקצהו השני קבוע בנקודה O שנמצאת באותו מישור. ברגע ההתנגשות החלקיק B במנוחה, הקפיץ רפוי ונתון ש-  $\alpha = 45^\circ$ . דרוש:

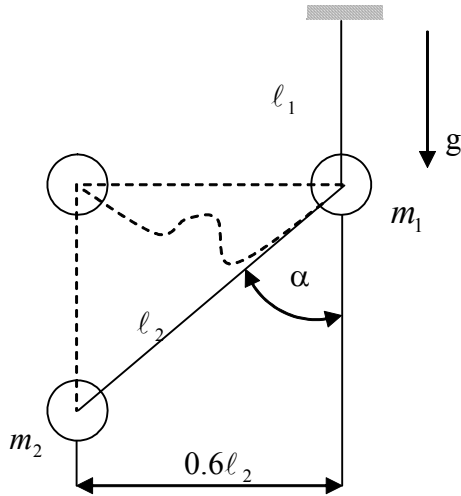
- א. מצא משוואה שממנה ניתן למצוא את המרחק המכסימלי של B מנקודה O.
- ב. מה תהיה מהירותו של חלקיק B כאשר המרחק הוא מכסימלי?

תשובות: א.  $[L(1+e)v \cos \alpha]^2 + \frac{4k}{m} r^2 (r-L)^2 = (1+e)^2 v^2 r^2$  ב.  $v_B = \frac{1}{4} \frac{L(1+e)^2 v_A \cos \alpha}{r_{\max}} e_\theta$



10.3 תרגיל

מסה נקודתית  $m_1$  תלויה בתקרה על ידי חוט שאורכו  $l_1$ . מסה  $m_2$  קשורה אל  $m_1$  באמצעות חוט שאורכו  $l_2$ . נותנים ל- $m_2$  ליפול חופשית בהשפעת הגרביטציה מנקודה המרוחקת בשיעור  $0.6 l_2$  מ- $m_1$  (ראה ציור). ברגע  $t_0$  בו מרוחקות המסות בשיעור  $l_2$ , מתפתח בשני החוטים כוח מתיחה פתאומי  $(\cos \alpha = 0.8, \sin \alpha = 0.6)$ . דרוש למצוא את המהירות של כל אחת משתי המסות מייד לאחר "ההתנגשות".



תשובה:

$$v_1 = \frac{12m_1}{25m_1 + 9m_2} \sqrt{g l_2 \cos \alpha}$$

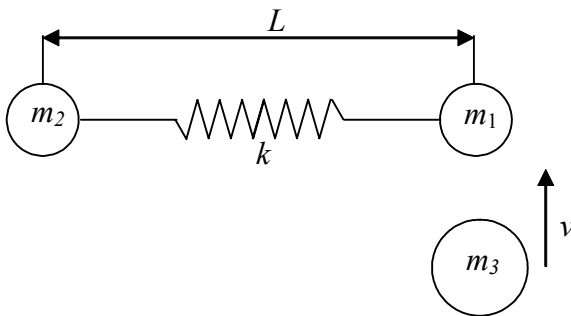
$$v_2 = [-12m_1 e_1 + (9m_1 + m_2) e_2] \frac{\sqrt{g l_2 \cos \alpha}}{25m_1 + 9m_2}$$

10.4 תרגיל

שלושה חלקיקים שמסתם:  $m_1 = m, m_2 = 2m, m_3 = 3m$  מונחים על מישור אופקי חלק. שני החלקיקים  $m_1$  ו- $m_2$  קשורים ביניהם ע"י קפיץ ליניארי בעל קשיחות  $k$  ואורך חפשי  $L$  המסות  $m_1$  ו- $m_2$  נמצאות במנוחה כפי שמתואר בציור והקפיץ במצב רפוי. ברגע  $t = 0$  פוגע חלקיק  $m_3$  בחלקיק  $m_1$  במהירות  $v$ , בניצב לקו המחבר את  $m_1$  ו- $m_2$ . מקדם התקומה בהתנגשות בין המסות  $m_1$  ו- $m_3$  הוא  $e$ . דרוש:

- מהי המהירות של כל אחד מהחלקיקים מייד לאחר ההתנגשות?
- מהי המהירות הזוויתית של הקו המחבר את  $m_1$  ו- $m_2$  ברגע כלשהו לאחר ההתנגשות כתלות ב- $x(t)$  שהוא המרחק בין המסות.
- יש לכתוב משוואה דיפרנציאלית עבור  $x$ , ממנה ניתן למצוא את  $x$ .

תשובות:



א.  $|v_1| = \frac{3}{4}(1+e)v, |v_2| = 0, |v_3| = \frac{3-e}{4}v$

ב.  $\dot{\theta} = \frac{3}{4}(1+e)v \frac{L}{x^2}$

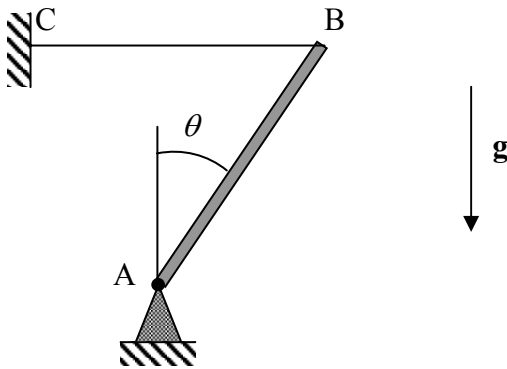
ג.  $m \frac{v_1'^2}{3} = \frac{m}{3} \dot{x}^2 + \frac{m}{3} x^2 \dot{\theta}^2 + \frac{k}{2} (x-L)^2$

פרק 11

11.1 תרגיל

נתון מוט אחיד באורך  $L$  ומסה  $m$  מחובר בקצה  $A$  לפרק חסר חיכוך ובקצה  $B$  לחוט  $BC$ . ברגע  $t = 0$  מנתקים את החוט  $BC$ . נתון שתנאי ההתחלה הם:  $\dot{\theta}(0) = 0, \theta(0) = \theta_0$ . דרוש:

- לרשום את המשוואה הדיפרנציאלית שבעזרתה ניתן לחשב את  $\theta = \theta(t)$  (לא לפתור).
- לחשב את המהירות הזוויתית  $\dot{\theta}$  כפונקציה של  $\theta$ .
- למצוא את כוח הריאקציות בפרק  $A$ .



תשובה: ב.  $\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L} (\cos \theta_0 - \cos \theta)$

11.2 תרגיל

גליל (מסה  $m$ , רדיוס  $R$ ) מתגלגל על מישור אופקי. מקדם החיכוך הוא  $\mu$ . על מרכז הגליל  $C$  פועל כוח  $P$  קבוע בכיוון  $e_1$ . נתון כי תנאי ההתחלה הם:  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = -\omega_0 R, \theta(0) = 0$  ו-  $\dot{\theta}(0) = \omega_0 > 0$ . דרוש לחשב את  $\theta(t), x(t)$  ואת גודל וכיוון כוח החיכוך בין הגליל ורצפה עבור התנאים הבאים:

א.  $P = 0$

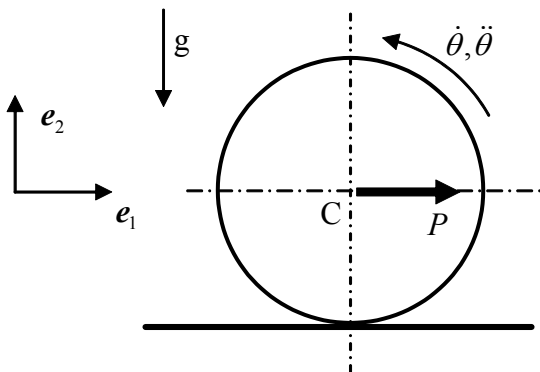
ב.  $P = 2\mu mg$

ג.  $P = 4\mu mg$

תשובות:

א-ב:  $x(t) = \frac{1}{3} \frac{P}{m} t^2 - \omega_0 R t, \quad \theta(t) = -\frac{1}{3} \frac{P}{mR} t^2 + \omega_0 t$

ג:  $x(t) = 3\mu g t^2 - \omega_0 R t, \quad \theta(t) = -\frac{\mu g}{R} t^2 + \omega_0 t$



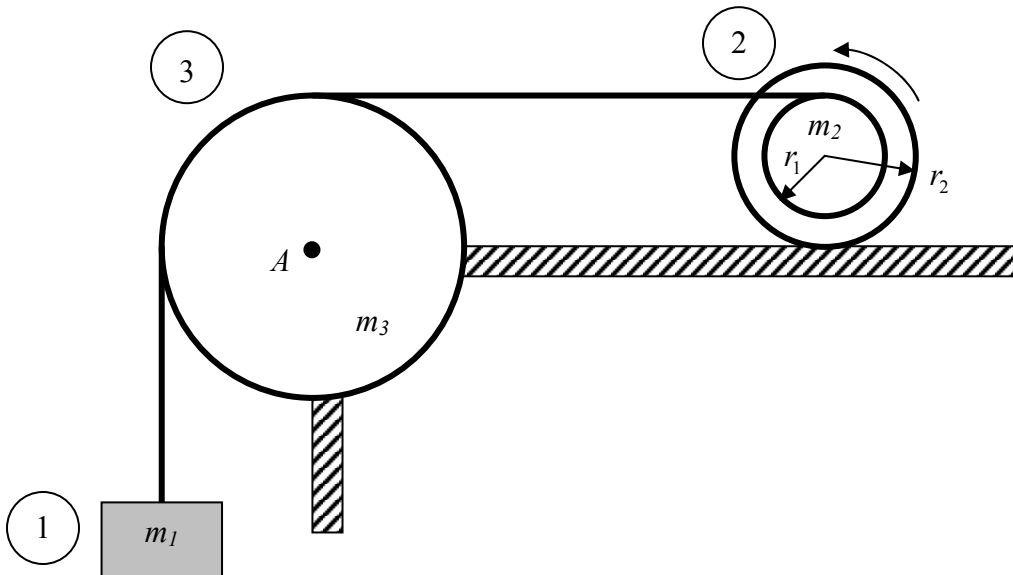
11.3 תרגיל

משליכים כדור באולינג בעל רדיוס  $R$  ומסה  $m$  על הקרקע במהירות אופקית  $v_0$ . נתון כי מקדם החיכוך בין הכדור והקרקע הוא  $\mu$  ותנאי ההתחלה הם  $\dot{\theta}(0) = 0$  ו-  $\theta(0) = 0$ . **דרוש להשב** את המרחק  $S$  שיעבור הכדור עד שתפסק ההחלקה בינו לבין הקרקע ויתחיל לגלגל טהור.

תשובה:  $S = \frac{12v_0^2}{49\mu g}$

11.4 תרגיל

עקב תלית המשקולת  $m_1$ , מאיץ הגלגל (2) שמאלה. הגלגל (2) כולל חישוק (רדיוס  $r_2$ ) ותוף (רדיוס  $r_1$ ) שמסתם המשותפת היא  $m_2$  והאינרציה המשותפת ביחס למרכזו היא  $I_2$ . כבל מלופף על התוף ומתחבר אופקית אל הגלגל (3) (שיש לה מסה  $m_3$  ואינרציה  $I_3$ ). ידוע שאין החלקה בין הכבל לבין הגלגל (3), אין חיכוך בפרק A וגם ידוע שמקדם החיכוך בין הרצפה לגלגל (2) הוא  $\mu$ .



דרוש:

- א. בהנחה ש- (2) מתגלגל על המישור האופקי ללא החלקה, מהי תאוצת המשקולת (1)?
- ב. עבור הנתונים הבאים יש להראות שגליל (2) מחליק.

$\mu = 0.3, I_2 = 6mr^2, I_3 = 3mr^2, m_1 = m, m_2 = m/2, r_1 = r, r_2 = 2r$

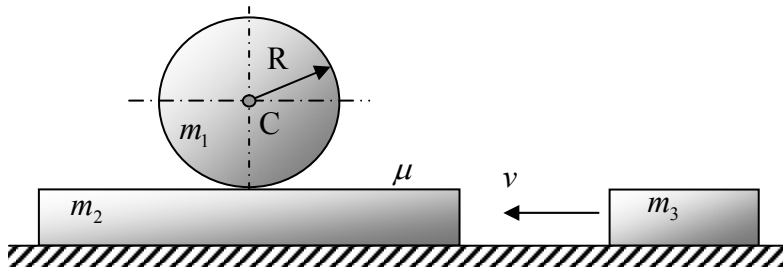
- ג. עבור הנתונים הנ"ל יש למצוא את תאוצת המשקולת  $m_1$ .

פרק 12

12.1 תרגיל

גליל בעל מסה  $m_1$  ורדיוס  $R$  מונח על גבי תיבה שמסתה  $m_2$ . מערכת זו נמצאת במנוחה עד אשר ברגע  $t = 0$  מסה  $m_3$ , הנעה במהירות  $v$ , פוגעת בתיבה  $m_2$  ונדבקת אליה (התנגשות פלסטית). כמתואר בציור. דרוש:

- א. בהנחה שאין חיכוך בין התיבה והגליל ( $\mu = 0$ ), מהן המהירויות של התיבה ושל מרכז הגליל (נקודה  $C$ ) מיד לאחר ההתנגשות?
- ב. בהנחה שקיימת החלקה בין הגליל  $m_1$  והתיבה  $m_2$  בזמן ההתנגשות ( $\mu > 0$ ), מהן המהירויות של התיבה ושל מרכז הגליל (נקודה  $C$ ) מיד לאחר ההתנגשות?
- ג. בהמשך לסעיף ב' (קיימת החלקה בין התיבה והגליל), חשב את הזמן שעובר עד אשר ההחלקה בין הגליל והתיבה תיפסק ויתחיל גלגול טהור?
- ד. בהנחה שקיימים גלגלי שיניים בין הגליל והתיבה ( $\mu = \infty$ ), מהן המהירויות של התיבה ושל מרכז הגליל מיד לאחר ההתנגשות?



תשובות:

$$t = \frac{m_3 v_0}{\mu g (3m_2 + 3m_3 + m_1)} \quad \text{ג.}$$

$$v_2 = \frac{3m_3 v_0}{m_1 + 3(m_2 + m_3)} e_1 \quad \omega = \frac{2m_3 v_0}{R[m_1 + 3(m_2 + m_3)]} e_3 \quad \text{ד.}$$

$$v_C = \frac{m_3 v_0}{m_1 + 3(m_2 + m_3)} e_1 \quad \hat{R} = \frac{m_1 m_3 v_0}{m_1 + 3(m_2 + m_3)} e_1$$

12.2 תרגיל

דיסקה מלאה בעלת מסה  $m$  ורדיוס  $b$  נמצאת במגע עם מסגרת קשיחה הסוככת על מישור אופקי חלק. מקדם החיכוך בין הדיסקה לבין המסגרת הוא  $\mu$ . קצה אחד של מיתר (בלתי מתארך) באורך  $3b$  מחובר למרכז הדיסקה  $B$ , וקצהו השני מחובר למסגרת בנקודה  $A$  כמתואר בצויר. בהתחלה ( $t=0$ ) נמצאות המסגרת והדיסקה במנוחה כאשר  $\theta = 0$ , ואז מתחילה המסגרת להסתובב בתאוצה זוויתית קבועה ( $\ddot{\theta} = p$ ). נתון שהכוח המרבי שהמיתר יכול לשאת הוא  $T_{CR}$ . מומנט האינרציה של דיסקה מלאה סביב מרכז המסה שלה

$$I_B = mb^2 / 2 \quad \text{הזנח את כוח הכובד. דרוש:}$$

א. בהנחה ש-  $\mu = 0$

1. מהי המהירות הזוויתית של הדיסקה?

2. מהי המתיחות בחוט?

3. מהי המהירות הזוויתית של המסגרת ברגע שהדיסקה נמצאת על סף ניתוק מהמסגרת?

-----

ב. מהו מקדם החיכוך המרבי ( $\mu_{cr}$ ) שעבורו הדיסקה תחליק על המסגרת מייד בתחילת התנועה ( $t = 0$ )?

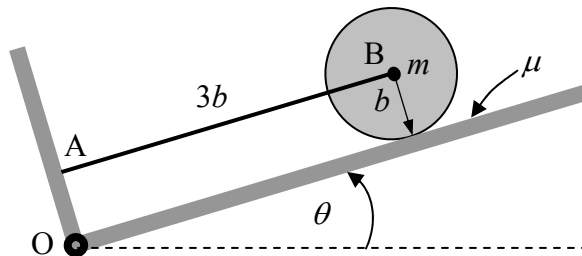
ג. בהנחה ש-  $\mu > \mu_{cr}$ , מהי המהירות הזוויתית של המסגרת ברגע שהדיסקה נמצאת על סף החלקה?

ד. אם הדיסקה לא מחליקה כלל על המסגרת:

1. מהי האנרגיה הקינטית של הדיסקה?

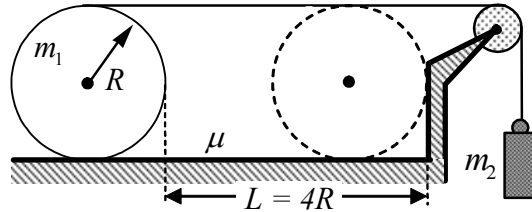
2. מהו התנע הזוויתי של הדיסקה סביב הנקודה הנייחת  $O$ ?

3. מהי התאוצה הזוויתית המינימלית של המסגרת, שעבורה יקרע המיתר מייד עם תחילת התנועה ( $t = 0$ )?



12.3 תרגיל

בציור מתואר גליל שמסתו  $m_1$  ורדיוסו  $R$ . הגליל מונח על מישור אופקי ומקדם החיכוך ביניהם הוא  $\mu$ . על הגליל מלופף חוט שמצדו השני תלויה משקולת  $m_2$ . החוט עובר דרך גלגלת חסרת מסה וגם חיכוך. החוט מושך את הגליל לכוון קיר אנכי חלק (חסר חיכוך). משחררים את המערכת ממצב מנוחה כשהגליל נמצא במרחק  $L = 4R$  מהקיר. מקדם התקומה בין הגליל לבין הקיר הוא  $e = 0.5$ . דרוש:

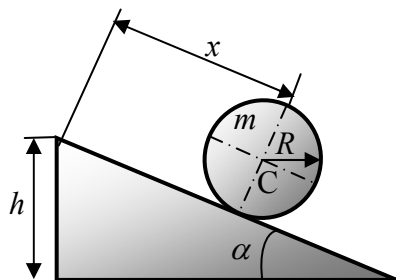


- א. אם הגליל לא מחליק מצא את התאוצה של מרכז הגליל מייד לאחר שחרור המערכת.
- ב. מהו מקדם החיכוך המינימלי שמבטיח גלגול ללא החלקה.
- ג. מצא את המהירות של מרכז הגליל מיד לפני ההתנגשות בקיר (בהנחה של גלגול טהור).
- ד. מצא את המהירות של מרכז הגליל מיד אחרי ההתנגשות בקיר.
- ה. מצא את המהירות הזוויתית של הגליל מיד לאחר ההתנגשות בקיר.
- ו. האם יש החלקה בין הגליל והמישור האופקי מיד לאחר ההתנגשות. ענה "כן" או "לא" ונמק את תשובתך.

12.4 תרגיל

מניחים דסקה בעלת רדיוס  $R$  ומסה  $m$  על משור משופע בזווית  $\alpha$  כמשורטט. מקדם החיכוך בין הדסקה למישור הוא  $\mu$ . תניח שהמערכת מתחילה ממנוחה. דרוש:

- א. עבור המקרה בו  $\mu \rightarrow \infty$  חשב את תאוצת מרכז המסה ואת כוח החיכוך מייד לאחר השחרור.
- ב. חשב מהו מקדם החיכוך המינימאלי עבורו לא תתרחש החלקה.
- ג. פתור את משוואת התנועה עבור המקרה  $\mu = 0$  ומצא את מהירותו ותאוצתו הקווית והזוויתית של הגליל בתחתית המישור.

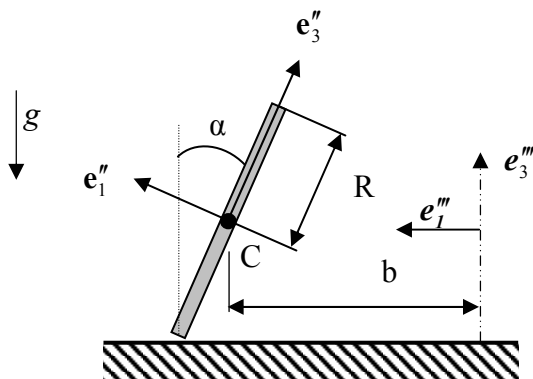




פרק 13

13.1 תרגיל

דיסקה דקה, שרדיוסה  $R = 0.4$  m, ומסתה  $m = 23$  kg מתגלגלת ללא החלקה על מישור אופקי בזווית נטייה  $\alpha$ . מרכז הדיסקה C נע במסלול מעגלי שרדיוסו  $b = 0.6$  m במהירות  $v = 2.54$  [m/sec] קבועה בכיוון  $e_2''$ . המערכות  $e_1''$  ו-  $e_3''$  מסתובבות כך שהמישור  $e_1'' - e_3''$  נשאר אנכי ומתלכד עם המישור  $e_1'' - e_3''$ . מרכז הדיסקה C נשאר במישור  $e_1'' - e_3''$ . דרוש:



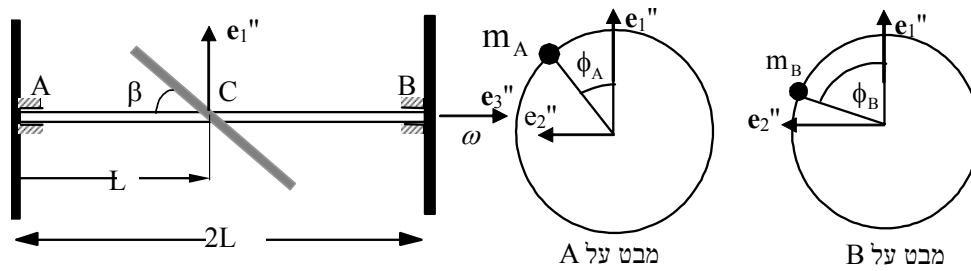
- א. באיזו זווית נטייה יכולה התנועה הזאת להתקיים?
- ב. מצא את הכוח שמפעילה הרצפה על הדיסקה.

13.2 תרגיל

אל ציר (באורך  $2L$ ), שממוסב בשני מסבים קבועים A ו- B, מרותכות שלוש דיסקות דקות ואחידות (לכל אחת מסה  $m$  ורדיוס  $R$ ) כמתואר בציור בעמוד הבא. שתי דיסקות מרותכות על הציר AB בשני קצותיו כך שהציר ניצב למישור הדיסקות. הדיסקה השלישית מרותכת לציר בנקודת האמצע C, כך שהזווית בין הציר האופקי והקו שמשיק לדיסקה היא  $\beta$ . הציר מסתובב במהירות זוויתית קבועה  $\omega$  בכיוון  $e_3''$ . כל אחד משני

המסבים A ו- B נמצא בבית כדורי שמונע ממנו להעביר מומנטים כלשהם. דרוש:

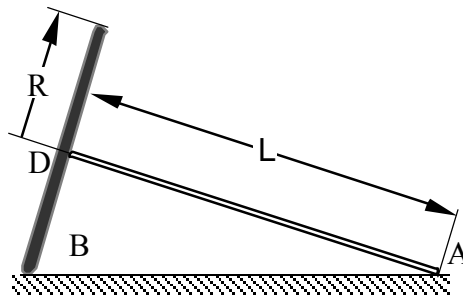
- א. מהוא וקטור התנע הזוויתי  $H_C$  של המערכת סביב נקודה C?
- ב. מצא את הכוחות הניצבים לציר AB שפועלים בנקודות A ו- B.
- ג. רוצים לאפס את הכוחות שפועלים בנקודות A ו B ע"י חבור מסה  $m_A$  להיקף הדיסקה A ומסה  $m_B$  להיקף הדיסקה B. מצא את גודל המסות  $m_A$  ו-  $m_B$  והזוויות  $\phi_A$  ו-  $\phi_B$  בהן יש לחברן.



13.3 תרגיל

גוף קשיח מורכב מדיסקה דקה ברדיוס  $R$  ומסה  $m$ , וממוט דק באורך  $L$  ומסה  $m$ , המחובר למרכז הדיסקה וניצב לה. הגוף נמצא במנוחה על רצפה (ראה ציור). ברגע  $t = 0$  מקנים לנקודה  $D$  (מרכז הדיסקה) מהירות  $v_0$  בכיוון ניצב לדף. נתון: אין החלקה בכל נקודות המגע של הגוף עם המשטח שמתחתיו. כתוב בטויים עבור הגדלים הבאים:

- א. המהירות והתאוצה הזוויתית  $\dot{\omega}(t)$  ו- $\omega(t)$  של הגוף.
- ב. הכוחות שמפעילה הקרקע על הגוף בנקודות המגע.

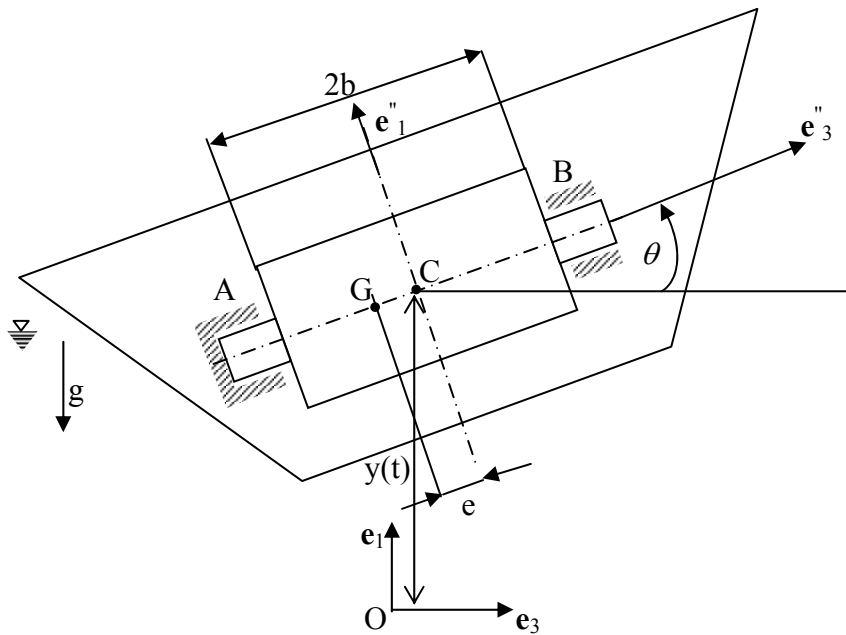


תשובה: א.  $\omega = \frac{v_0}{L \sin \alpha} e'_1$  ,  $\dot{\omega} = -\frac{v_0^2}{L^2 \cos \alpha \sin \alpha} e'_3$

13.4 תרגיל

אונייה מתנדנדת במישור אנכי כך שהתזוזה האנכית של הנקודה  $C$  היא  $y = A \cos(pt)$ . כמו כן התנודה הזוויתית ("עלה ורד") היא  $\theta = B \sin(pt)$ . באוניה יש טורבינה. מומנטי האינרציה של הרוטור ביחס ל- $C$ : פולארי  $I_p$ , רחבי  $I_t$ . מהירות הסיבוב של הטורבינה במסבים היא  $n$ . הנקודה  $C$  ומרכז המסה  $G$  של הרוטור נמצאים על ציר הסיבוב. יש גרוויטציה. כל אחד משני המסבים  $A$  ו- $B$  נמצא בבית כדורי שמונע ממנו להעביר מומנטים כלשהם. מסב  $A$  יכול להפעיל כוח בכיוון ציר הטורבינה  $AB$  ומסב  $B$  לא יכול להפעיל כוח בכיוון זה.

דרוש למצוא את רכיבי הכוחות שמפעילים המסבים על הטורבינה במערכת  $e_i''$  הצמודה לאוניה.



נתונים:

$$m = 100\text{kg} ; I_p = 15\text{kg} - \text{m}^2 ; I_t = 30\text{kg} - \text{m}^2 ; b = 0.8\text{m}$$

$$m ; n = 30000\text{rpm} ; A = 2\text{m} ; B = 0.2\text{rad} ; p = 3\text{rad} / \text{s}$$